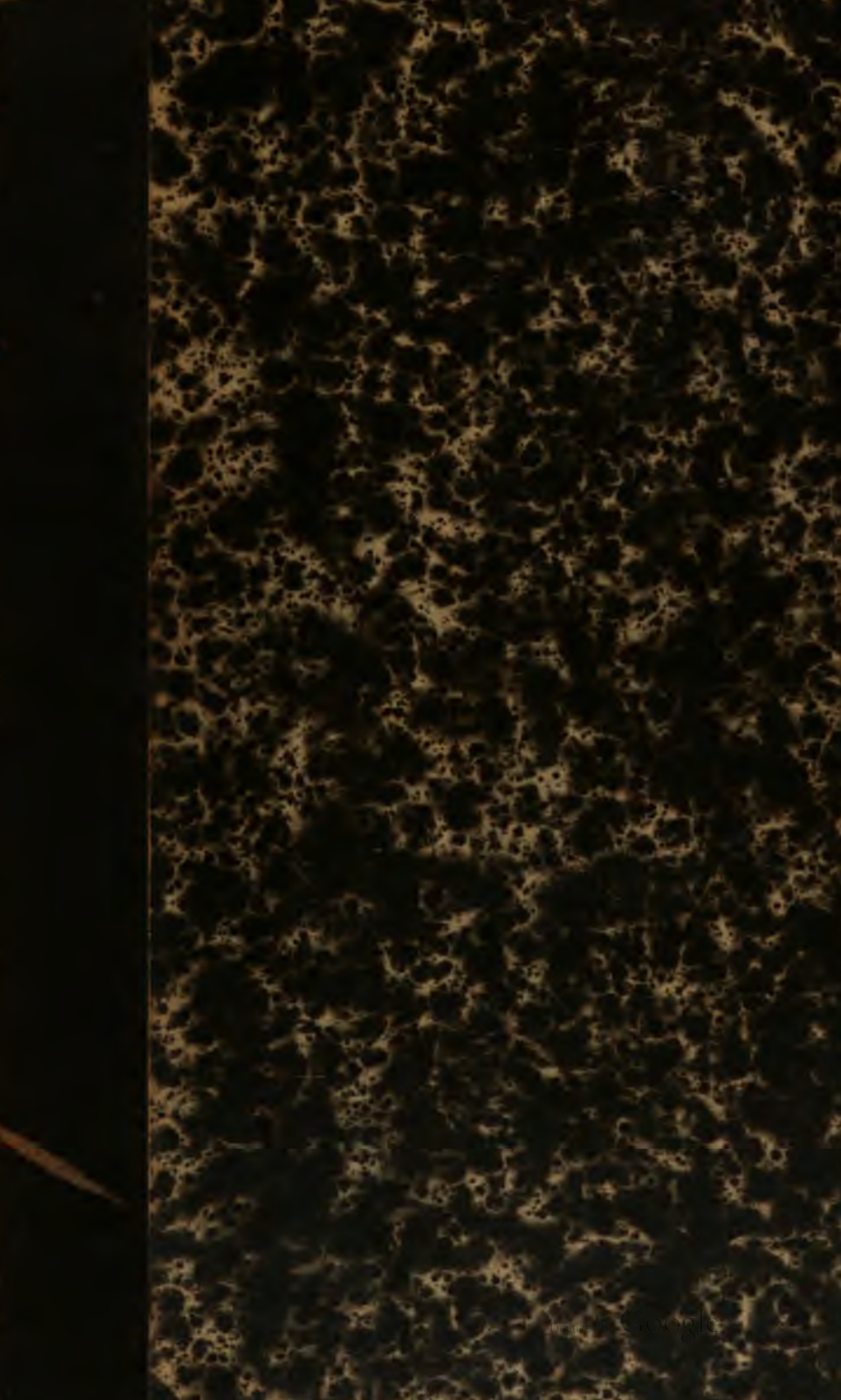
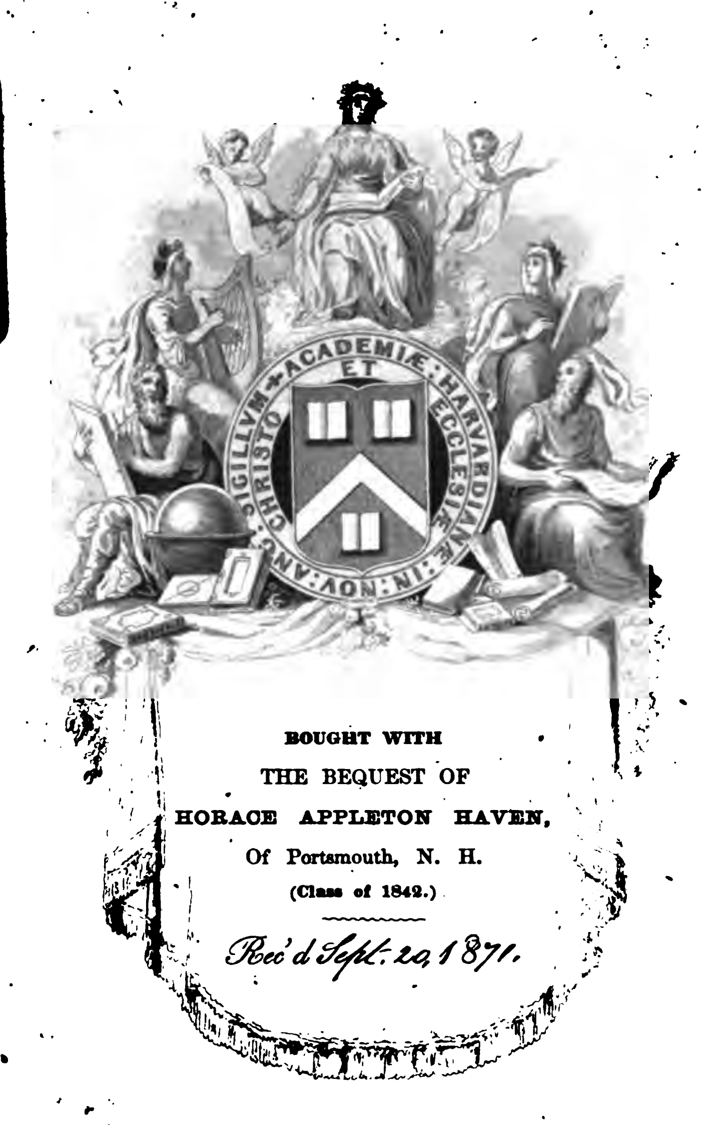
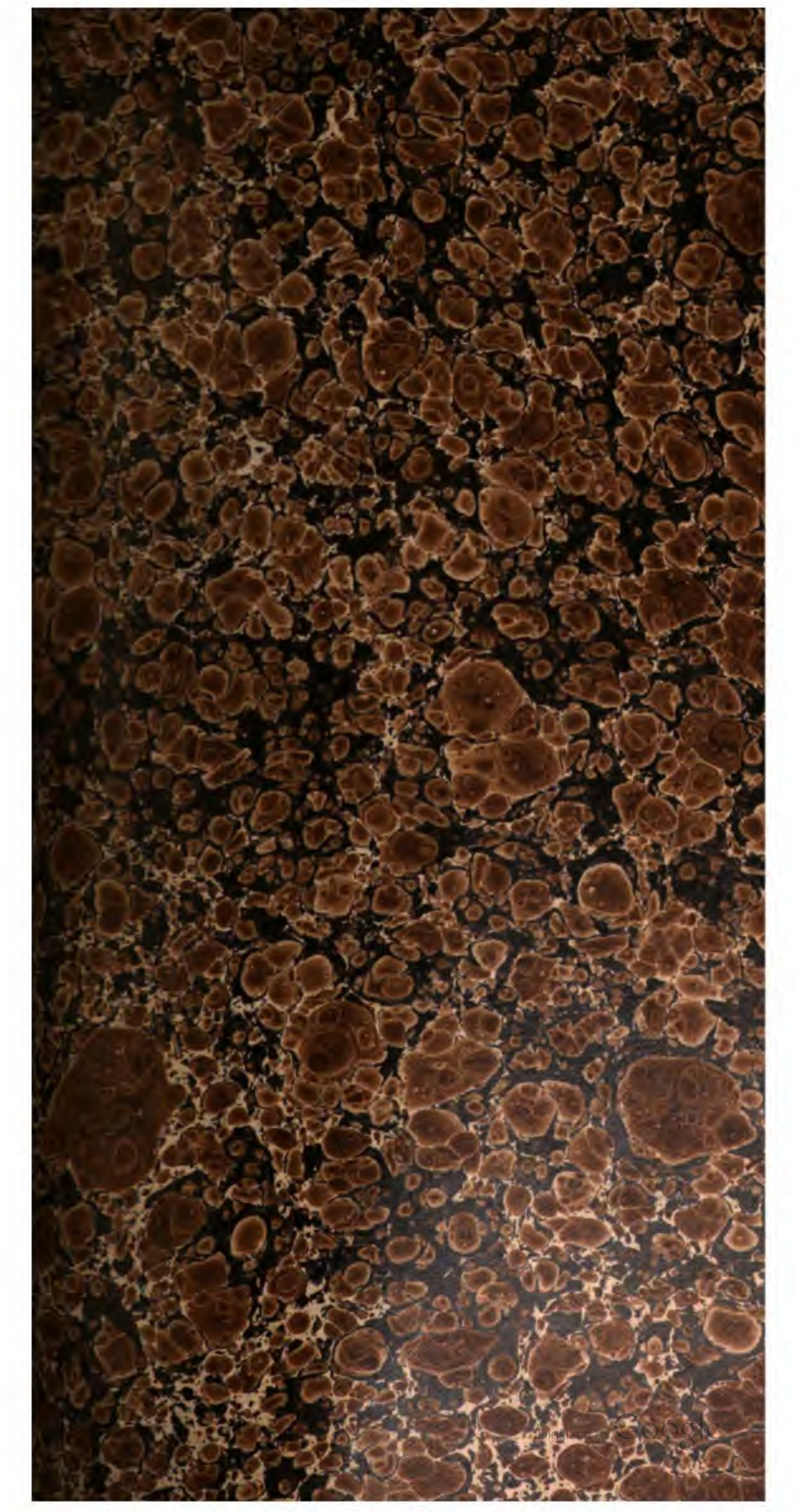



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIAE



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1868.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

J. BOURGET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME SEPTIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM ;

CONTINUÉE, A PARTIR DE 1863, PAR MM. GERONO ET PROUHET.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1868.

1871, Sept. 20.
Haven Fund.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ÉTUDE DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

RECHERCHES SUR LES SURFACES TÉTRAÉDRALES SYMÉTRIQUES, par M. *Jules de la Gournerie*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, professeur de Géométrie descriptive au Conservatoire des Arts et Métiers, avec des Notes par *Arthur Cayley*, membre de la Société Royale de Londres, correspondant de l'Institut de France, professeur à l'Université de Cambridge. Paris. Gauthier-Villars, 1867. — Prix : 6 francs.

The Cambridge and Dublin mathematical journal. — *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* — *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* — *Nouvelles Annales de Mathématiques.* — *Divers Mémoires de MM. Cayley, Steiner, Kummer, Cremona, Mannheim, Moutard et Darboux.*

Les études mathématiques en France ont subi, il y a une quinzaine d'années, une crise fort grave en apparence, dont les amis de la science se préoccupèrent vivement. Le principe d'autorité, depuis plusieurs siècles exclu de nos écoles, y fit tout à coup une brusque et hautaine

apparition, et le vieil adage : *Quand on sait le texte on sait la science,* sembla proposé aux maîtres aussi bien qu'aux élèves. De volumineux programmes, détaillant leçons par leçons les matières de l'enseignement, furent imposés, d'un bout de la France à l'autre, dans tous les établissements d'instruction publique, dont les élèves devaient tous, le même jour, à la même heure, étudier le même théorème, s'exercer aux mêmes calculs, ou dessiner la même épure. On décida ce que les élèves devaient savoir complétement, les idées qu'ils s'abstiendraient d'approfondir, et les difficultés devant lesquelles ils devaient s'incliner sans en demander l'explication à leurs maîtres.

Les sciences devaient être étudiées pour leur utilité pratique, et c'était une dangereuse erreur d'y voir surtout une gymnastique intellectuelle, et un moyen de fortifier l'esprit et d'en accroître la subtilité; les élégantes questions du concours général des lycées de Paris furent remplacées plusieurs fois par des calculs numériques, et les grands prix, auxquels on conservait le nom de *Prix d'honneur,* accordés à ceux qui obtenaient les chiffres les plus exacts.

Un tel régime, malgré l'incontestable capacité de ceux qui s'en firent les promoteurs, semblait devoir affaiblir rapidement en France l'esprit scientifique, en faisant disparaître, dès le début, l'habitude de l'effort individuel et le goût des recherches personnelles, et, si les théories transcendantes appartenant à une autre sphère pouvaient malgré tout se développer et s'accroître, on devait désespérer, pour longtemps, de l'étude plus humble en apparence, mais non moins utile ni moins vaste, des théories réputées élémentaires qui couronnent notre enseignement classique.

Les résultats ont trompé de la manière la plus heureuse ces fâcheuses prédictions, et nos écoles, affranchies gra-

duellement, il est vrai, des entraves imposées, ont suivi sans infériorité les progrès incessants des Universités d'Angleterre et d'Allemagne. Des méthodes nouvelles, dont les plus importantes sont dues à nos illustres compatriotes, MM. Poncelet et Chasles, ont été de mieux en mieux appréciées à Paris, tout aussi bien qu'à Cambridge et à Berlin. Il était sans exemple, il y a vingt ans, qu'un ouvrage élémentaire étranger fût consulté par nos écoliers. J'ai sous les yeux, en écrivant ces lignes, la petite bibliothèque d'un candidat à l'École Polytechnique, et j'y aperçois : *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, von Otto Hesse*; *Lessons of higher algebra, by S. Salmon*; *Geometrie of three dimensions, by Salmon*; à côté se trouve le *Traité des propriétés projectives des figures* de M. Poncelet et la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, dont les couvertures fatiguées montrent assez que, pour se préparer à un concours difficile, on ne juge nullement nuisible de trop apprendre et de trop approfondir. Les examinateurs, par la force des choses, et quels que soient les règlements, sont conduits à préférer les candidats qui, plus curieux ou plus heureusement doués, au lieu de se préparer à traiter dans la langue mathématique un certain nombre de sujets désignés, s'efforcent d'apprendre la langue elle-même et de la parler couramment.

L'activité des inventeurs et l'attention des géomètres, presque exclusivement appliquées naguère aux méthodes infinitésimales, sont détournées aujourd'hui vers les théories qui, pour être réputées plus élémentaires, ne sont ni plus faciles à perfectionner ni moins intéressantes à approfondir. Pendant trop longtemps, par exemple, on a cru ou affecté de croire que la géométrie des lignes ou des surfaces algébriques, dépendant, depuis Descartes, de méthodes sûres et régulières, n'offrait plus qu'un exercice de patience utile aux seuls écoliers. J'ai dit ici même com-

bien le plus ingénieux et le plus inventif peut-être des géomètres français contemporains avait dû montrer de persévérance et d'abnégation pour triompher, par l'excellence de ses travaux et la variété de ses recherches toujours originales, de l'indifférence systématique dans laquelle de très-illustres juges tenaient, avant tout examen, les questions difficiles et brillantes qui leur semblaient en dehors de la haute science.

Descartes lui-même avait peut-être contribué à répandre cette idée, que la méthode régulière et générale dont il est l'inventeur enlève, avec toute la difficulté, tout l'intérêt des études particulières sur les courbes et les surfaces. « J'espère, dit-il, avec un peu trop d'or-
» gueil en terminant sa Géométrie, que nos neveux me
» sauront gré, non-seulement des choses que j'ai ici ex-
» pliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontai-
» rement afin de leur laisser le plaisir de les inventer. »

La vérité est pourtant que, si l'instrument puissant créé par le génie de l'illustre philosophe permet de vérifier avec aisance, parfois même avec élégance, les théorèmes connus à l'avance, il n'est donné qu'aux esprits inventifs d'en déduire des résultats réellement nouveaux, dont la vérification ultérieure, quelque facile qu'elle puisse être, ne diminue en rien l'importance.

Les propriétés d'un certain nombre de surfaces algébriques étudiées depuis quelques années ont donné lieu à des travaux d'importance inégale, sur l'ensemble desquels il est juste d'appeler d'une manière particulière l'attention des amis de la Géométrie.

Citons en premier lieu de belles recherches sur la théorie générale des surfaces de troisième degré. Quelques détails sur les méthodes employées par Steiner et par M. Cayley montreront assez l'erreur profonde de ceux qui croiraient que, pour traiter des questions de ce genre,

il suffit de calculer juste en appliquant des règles connues. Toute surface de second degré ayant un nombre infini de génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires, il importe, pour la généralité des théorèmes comme pour l'exactitude des démonstrations, de ne pas faire la distinction. Peut-on de même placer des lignes droites sur les surfaces de troisième degré, et quel en est le nombre? La mise en équation du problème est des plus faciles, et conduit immédiatement à quatre équations entre quatre inconnues. On en peut conclure que la question est déterminée, et comporte, en général, un nombre fini de solutions. Quel est ce nombre? L'application régulière des méthodes d'élimination le donnerait bien difficilement. Voici comment raisonne M. Cayley :

Si par une ligne droite située sur une surface de troisième ordre, on fait passer un plan quelconque, l'intersection de ce plan avec la surface se composera évidemment d'une droite et d'une conique, et il touche la surface aux deux points où ces lignes se rencontrent et qui sont des points doubles de l'intersection. Lorsque, par une position particulière du plan, la conique se réduit à deux droites, le plan coupe la surface suivant trois droites et la touche aux sommets du triangle dont elles sont les côtés; il est alors triplement tangent. On prouve aisément que par chaque ligne droite située sur la surface passent cinq de ces plans triplement tangents. Si l'on considère l'un d'eux en particulier, par chacune des trois droites qu'il contient, on peut en mener quatre autres. Ces douze nouveaux plans coupent la surface suivant vingt-quatre lignes droites nouvelles qui, réunies aux trois premières, forment un total de vingt-sept, et c'est ainsi que M. Cayley prouve l'existence de vingt-sept droites sur chaque surface de troisième degré. Il n'est pas moins facile d'établir qu'il n'en peut exister un plus grand nombre. Que

l'on considère en effet l'un des plans triplement tangents qui contiennent trois droites formant leur complète intersection avec la surface; chaque ligne de la surface coupe ce plan en un point situé sur l'une des trois lignes et doit être, par conséquent, située dans un plan passant par l'une d'elles, qui, contenant deux droites de la surface, doit nécessairement en contenir trois, et est, par conséquent, un des douze plans dont nous avons parlé plus haut.

Toute surface du troisième ordre contient donc vingt-sept droites et n'en peut contenir davantage.

Il faut excepter toutefois les surfaces gauches du troisième ordre et les surfaces cylindriques et coniques, qui en contiennent en nombre infini.

Les surfaces gauches du troisième ordre ont été l'objet d'une étude fort intéressante faite par M. Cremona, dans laquelle plusieurs résultats très-nets et élégamment démontrés peuvent être cités à côté des belles recherches de M. Cayley, dont ils sont l'ingénieux complément.

M. Cremona démontre d'abord que les génératrices d'une surface réglée du troisième ordre rencontrent deux droites fixes.

Soient, en effet, dit-il, G, K, H, L, quatre génératrices; l'hyperboloïde qui passe par trois d'entre elles est coupé par la quatrième en deux points, et les génératrices D et E de l'autre système menées par ces points rencontrent les quatre droites G, K, H, L; elles ont donc chacune quatre points communs avec la surface, sur laquelle elles sont par conséquent entièrement situées.

Cela posé, considérons le plan EG, qui contient, outre la droite E, la génératrice G; la section complète de la surface par le plan, contenant deux droites et étant du troisième ordre, en contient nécessairement une troisième G', et ce plan, coupant la surface suivant les lignes E, G, G',

coupe nécessairement toutes les génératrices en des points situés sur la droite E, qui, par conséquent, les rencontre toutes; par la même raison, elles s'appuient toutes sur la droite D, et la proposition se trouve démontrée.

Considérons de nouveau le plan EGG'; les droites G et G', rencontrant E en des points distincts, doivent nécessairement rencontrer D en un même point, intersection de cette droite avec le plan EGG'. La directrice D étant rencontrée en ce point par deux génératrices, la surface admet deux plans tangents, et le point est *double*; il en est de même évidemment de tous les points de D, qui est une *droite double* située sur la surface.

Toute surface gauche du troisième ordre admet donc une droite double qui est l'une de ses deux directrices rectilignes.

M. Cremona démontre, en outre, les théorèmes suivants :

Toute surface du troisième ordre dans laquelle se trouve une droite double est une surface réglée, et toutes les sections coniques placées sur la surface s'appuient sur la droite double.

La surface engendrée par une droite qui s'appuie sur une conique et sur deux droites dont l'une rencontre la conique est une surface du troisième ordre dont la directrice rectiligne qui rencontre la conique est la droite double.

D'après une remarque de M. Cayley, les deux directrices rectilignes de la surface gauche du troisième ordre peuvent coïncider, et l'illustre géomètre donne dans ce cas la construction suivante de la surface.

Prenons une courbe cubique plane avec un point double; menons par ce point une droite quelconque et supposons que les plans A, B, C,... menés par cette droite correspondent harmoniquement aux points *a*, *b*,

$c, \ldots$, de la même droite. Si par un point *m* quelconque de la droite, on mène dans le plan correspondant M une droite qui rencontre la courbe cubique, le lieu de cette droite sera la surface gauche du troisième ordre dont les deux directrices rectilignes coïncident.

Les vingt-sept droites signalées, pour la première fois, par M. Cayley étaient depuis longtemps connues de Steiner, dont les recherches fort intéressantes ont été réunies postérieurement dans un article du *Journal de Crelle*.

Par les neuf droites suivant lesquelles se coupent deux à deux les faces de deux trièdres et par un point arbitrairement choisi, on peut faire passer une surface du troisième ordre et une seule. Chaque plan conduit par le point donné coupe le système des neuf droites en neuf points qui déterminent avec lui une courbe du troisième ordre; toutes ces courbes sont sur une même surface. Avec les neuf droites on peut former six groupes de trois qui ne se coupent pas deux à deux et déterminent un hyperboloïde à une nappe; chacun de ces six hyperboloïdes coupe la surface suivant trois nouvelles droites. Il est clair, en effet, que toute génératrice du second système menée par un point de l'intersection a quatre points communs avec la surface du troisième ordre, sur laquelle elle est par conséquent située tout entière. Ces six groupes de trois lignes réunies aux neuf premières forment en tout vingt-sept lignes droites situées sur la surface. Chacune de ces vingt-sept lignes est coupée par dix autres, qui se partagent en cinq groupes de deux droites situées dans un même plan, en sorte qu'elle forme cinq triangles avec les dix droites. Les vingt-sept droites se coupent en 135 points et forment en tout quarante-sept triangles.

Diverses surfaces du quatrième ordre ont été l'objet d'études fort intéressantes. Citons en premier lieu plusieurs recherches élégantes sur la surface annulaire nom-

mée *tore*, engendrée par la révolution d'un cercle autour d'une droite située dans son plan. Un géomètre belge, M. Pagani, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Bruxelles en 1826, avait étudié les sections planes de cette surface; mais les résultats les plus intéressants, qui semblent lui avoir échappé, ont été découverts postérieurement. Le plus curieux, sans contredit, dans cette étude maintenant complète, est dû à M. Yvon Villarceau :

Tout plan doublement tangent à la surface la coupe suivant deux cercles, de sorte que par chaque point du tore passent quatre circonférences différentes, qui y sont entièrement contenues; toute sphère doublement tangente contient également deux de ces cercles.

M. Darboux enfin, en étudiant les sections quelconques de la surface, a montré qu'elles sont les réciproques d'ovales de Descartes en leur assignant des propriétés focales qui les rapprochent des courbes du second degré.

Le tore est un cas particulier d'une surface étudiée d'abord par M. Charles Dupin et que l'on a nommée *cyclide*. Cette surface est l'enveloppe d'une sphère qui se meut en restant tangente à trois sphères fixes qui, pour une même cyclide, peuvent être choisies d'une infinité de manières. Cette surface est la seule dont toutes les lignes de courbure soient circulaires. M. Mannheim a établi élégamment ses propriétés essentielles en montrant qu'on peut la déduire du tore au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques.

Le tore et la cyclide se rattachent à une classe plus générale de surfaces de quatrième degré, découvertes et étudiées en même temps par MM. Moutard et Darboux, et dont la propriété la plus saillante est de fournir un des exemples les plus élégants et les plus simples du système orthogonal triple et un, comme celui des surfaces du second degré homofocales dont il est la généralisation.

Le tore et la cyclide ont pour ligne double le cercle imaginaire à l'infini; mais cette propriété ne leur appartient pas exclusivement : car elles ont, en outre, deux points singuliers, deux points doubles. C'est en adoptant la première propriété comme définition, que l'on est conduit de la manière la plus simple aux surfaces nouvelles, qui peuvent, en outre, comme l'a montré M. Moutard, être considérées comme les enveloppes d'une sphère qui se meut en restant orthogonale à une sphère fixe, et de manière que le centre décrive une surface du second degré. Dans le cas du tore et de la cyclide, cette surface du second degré se réduit à une section conique.

Tout plan doublement tangent à une telle surface la coupe suivant deux cercles. Ces plans, d'ailleurs, se répartissent en cinq séries, respectivement tangents à cinq lignes du second degré, en sorte qu'il passe par chaque point dix sections circulaires. Ces surfaces, à l'étude desquelles M. Darboux a mêlé, dans plusieurs beaux Mémoires, des recherches générales et élevées, sont appelées, selon toute apparence, à jouer un rôle des plus importants. Analogues aux surfaces orthogonales du second degré, auxquelles elles peuvent se reduire dans un cas particulier, décomposables comme elles en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure, on peut, comme elles aussi, les considérer comme homofocales, et il suffit pour cela, en suivant une analogie facilement indiquée, d'étendre un peu la définition.

M. Plucker a nommé *foyers d'une courbe plane* les points situés dans son plan d'où l'on peut mener à la courbe deux tangentes ayant pour coefficients angulaires $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. Dans un de ces articles courts et élégants, qui, dans l'excellent recueil de M. Crelle, se détachent entre tant d'œuvres remarquables pour s'imprimer à jamais dans la mémoire des géomètres, M. Kummer

a montré que des courbes orthogonales appartenant à un seul et même système ont nécessairement un certain nombre de foyers communs; c'est cette remarque importante que M. Darboux a généralisée en donnant aux lignes focales d'une surface la définition suivante :

Que l'on mène les plans tangents (imaginaires bien entendu) qui sont parallèles à ceux du cône asymptote de la sphère, ils envelopperont une surface développable circonscrite à la proposée; sur chacune des génératrices de cette surface, il y aura un point réel; le lieu de ce point forme une ou plusieurs courbes qui seront nommées les *focales* de la surface développable, car par chacun d'eux passent deux génératrices imaginaires conjuguées. Si l'on nomme *foyer* un point quelconque de l'une des focales, on pourra définir le *foyer* comme une sphère de rayon nul ayant un double contact avec la surface; deux surfaces homofocales sont, d'après les définitions précédentes, inscrites dans une même développable imaginaire. On sentira toute l'importance d'une telle considération, en songeant que c'est en se plaçant à ce point de vue que M. Chasles a élevé une théorie si élégante et si simple des surfaces homofocales du second degré.

Les surfaces du quatrième ordre qui nous occupent ont cinq focales placées sur cinq sphères orthogonales, deux à deux, et elles ne peuvent en avoir une sans avoir toutes les autres. Trois d'entre elles passent par un point quelconque de l'espace et s'y coupent à angle droit. Elles sont données d'ailleurs comme les surfaces du second degré, avec lesquelles leur analogie est si remarquable, par les valeurs différentes attribuées à un paramètre dans une même équation du quatrième degré.

Il existe sur le plan des courbes analogues que l'on peut définir comme ayant pour point double les deux points imaginaires à l'infini, communs aux cercles de

plan. Ces courbes, qui jouissent de belles propriétés, comprennent en particulier les ovales de Descartes.

Les ovales de Descartes sont définies par deux foyers tels, que leurs distances aux points de la courbe, multipliées respectivement par des facteurs donnés, donnent une somme constante. Elles ont, comme M. Chasles l'a montré, un troisième foyer situé sur la ligne qui joint les deux premiers, et toutes les ovales ayant les trois mêmes foyers forment un système double orthogonal, c'est-à-dire que par chaque point du plan il passe deux ovales se coupant à angle droit, dont l'étude a conduit récemment M. Darboux à une démonstration nouvelle et fort élégante du célèbre théorème d'Euler, sur l'addition des fonctions elliptiques. J. Bertrand.

(Extrait du *Journal des Savants*.)

(*La suite prochainement*.)

NOTE SUR LE NOMBRE e

(voir 2e série, t. VI, p. 341);

Par M. S. REALIS.

§ II.

1. Reprenons la formule

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p < e^x < \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p},$$

où

$$p > 0,\ p^2 > x^2,$$

et

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Nous en déduirons, en changeant x en $-x$, et ajoutant membre à membre,

$$(1)\quad \left(1+\frac{x}{p}\right)^p+\left(1-\frac{x}{p}\right)^p < 2\,\mathrm{Ch}\,x < \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p}+\left(1+\frac{x}{p}\right)^{-p},$$

puis

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(1+\frac{x}{p}\right)^p+\left(1-\frac{x}{p}\right)^p = 2\,\mathrm{Ch}\,x \\ &= \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p}+\left(1+\frac{x}{p}\right)^{-p} \end{aligned} \right\} \text{ pour } p=\infty,$$

en représentant par la notation $\mathrm{Ch}\,x$ la fonction

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots.$$

Nous aurons également, lorsqu'on fait croître p au delà de toute valeur donnée,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(1+\frac{x}{p}\right)^p-\left(1-\frac{x}{p}\right)^p = 2\,\mathrm{Sh}\,x \\ &= \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p}-\left(1+\frac{x}{p}\right)^{-p} \end{aligned} \right\} \text{ pour } p=\infty,$$

en désignant par $\mathrm{Sh}\,x$ la fonction

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots.$$

Les fonctions $\mathrm{Ch}\,x$, $\mathrm{Sh}\,x$ sont appelées cosinus et sinus hyperboliques de x, parce que, en les regardant comme des coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires, elles appartiennent à l'hyperbole équilatère, courbe ayant de nombreuses analogies avec le cercle. On a, en effet,

$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1,$$

équation de l'hyperbole et analogue à celle qui existe

entre le cosinus et le sinus d'un arc de cercle. Mais, dans le cas actuel, x ne doit pas être considéré comme un arc de la courbe.

De même que la formule (1), la formule suivante

$$(4) \quad \left(1+\frac{x}{p}\right)^p - \left(1-\frac{x}{p}\right)^p < 2\,\mathrm{Sh}\,x < \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p} - \left(1+\frac{x}{p}\right)^{-p}$$

a lieu pour $p > x > 0$, ainsi que cela se prouve en comparant les développements des trois membres en séries convergentes.

Ces résultats ramènent à des notions élémentaires et parfaitement explicites l'origine analytique des fonctions hyperboliques. On a, de plus, dans les formules (1) et (4), un moyen direct d'évaluer ces fonctions en nombres, en assignant en même temps le degré d'approximation qu'on atteint à chaque opération.

2. En se reportant à la formule (2) du § I, savoir

$$1 + x < e^x < 1 + x e^x,$$

on aperçoit aussitôt des relations nouvelles et très-remarquables qui ont lieu à l'égard des fonctions hyperboliques.

Des expressions de $\mathrm{Ch}\,x$ et $\mathrm{Sh}\,x$ en fonction des exponentielles, on tire

$$e^x = \mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x,$$
$$e^{-x} = \mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x.$$

Au moyen de ces valeurs, la formule citée nous fournit les relations suivantes

$$(5) \quad \begin{cases} 1 + x < \mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x < 1 + x(\mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x), \\ 1 - x < \mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x < 1 - x(\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x), \end{cases}$$

qui subsistent pour toutes les valeurs positives et négatives de x, et se réduisent à des égalités lorsque $x = 0$.

Ces formules doivent être regardées comme fondamentales dans la théorie des sinus et cosinus hyperboliques, puisqu'elles expriment une propriété caractéristique du nombre e, duquel les fonctions mentionnées tirent leur origine.

On peut remarquer que les deux formules (5) rentrent l'une dans l'autre si l'on y joint les relations

$$\mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}\,x, \quad \mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Sh}\,x.$$

Nous inscrivons encore les formules

$$(6) \qquad \begin{cases} 1 < \mathrm{Ch}\,x < 1 + x\,\mathrm{Sh}\,x, \\ x < \mathrm{Sh}\,x < x\,\mathrm{Ch}\,x, \end{cases}$$

qu'il y aura occasion de rappeler plus loin. La première se tire des inégalités (5) par voie d'addition; l'autre se vérifie à l'aide des séries convergentes écrites plus haut, et suppose x positif.

3. Nous allons étendre maintenant à des valeurs imaginaires de la variable les résultats obtenus au n° 1 pour les valeurs réelles. A cet effet, nous changerons x en $x\sqrt{-1}$ dans les équations (2) et (3); nous serons amenés par là à considérer les expressions symboliques

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

qui se développent respectivement dans les séries réelles et convergentes

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

et que nous représenterons par les notations abrégées $\cos x$, $\sin x$. Nous dirons, d'après cela, que $\cos x$ est la

limite commune vers laquelle tendent les expressions

$$\frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p+\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{1}\right)^p}{2}.$$

$$\frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}+\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}}{2}$$

lorsque p tend vers l'infini, et que $\sin x$ est, dans le même cas, la limite commune des expressions

$$\frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p-\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p}{2\sqrt{-1}},$$

$$\frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}-\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}}{2\sqrt{-1}}.$$

Si p a une valeur finie, mais positive et plus grande numériquement que x, les quantités $\cos x$, $\sin x$ seront toujours comprises entre les expressions indiquées. Mais il est remarquable que les inégalités (1) et (4) se trouveront renversées par suite du changement de x en $x\sqrt{-1}$; c'est-à-dire qu'il faut poser

$$\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p+\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p$$
$$>2\cos x>\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}+\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p},$$

$$\frac{\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p-\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^p}{\sqrt{-1}}$$
$$>2\sin x>\frac{\left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}-\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{p}\right)^{-p}}{\sqrt{-1}},$$

en faisant attention que x doit être positif dans la deuxième de ces formules. Cela se prouve par la comparaison des développements en séries convergentes, ce dont on laissera le soin au lecteur.

Ces résultats ne sont vrais, remarquons-le bien, que parce que les imaginaires s'entre-détruisent dans chacune des expressions considérées ; il n'y aurait, en effet, aucun sens à attacher à des formules telles que

$$A + B\sqrt{-1} > 2\cos x,$$

$$\lim \frac{A' + B'\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 2\sin x,$$

si l'on n'avait pas, par identité, $B = 0$, $A' = 0$.

4. D'après la définition que nous en avons donnée, les fonctions $\cos x$, $\sin x$ résultent liées entre elles par la relation

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

et fournissent les valeurs particulières $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Elles peuvent donc être représentées par les abscisses et les ordonnées rectangles d'un cercle ayant l'unité pour rayon, et l'on aperçoit déjà l'analogie de ces fonctions avec le cosinus et le sinus trigonométriques de l'arc x. Cette analogie ne cesse pas de subsister si l'on applique les expressions du n° 3 à la reconstruction des formules trigonométriques relatives à l'addition et soustraction des arcs, à leur multiplication, etc. (on peut voir, à ce sujet, la note C à la fin du *Complément des éléments d'Algèbre,* de Lacroix). Mais il n'y a pas seulement analogie, il y a identité. On reconnaît effectivement, dans les séries écrites au n° 3, les développements qui s'obtiennent pour les fonctions trigonométriques $\cos x$, $\sin x$ à l'aide de la formule de Moivre. Rappelons d'ailleurs qu'il y a moyen

de remonter directement des séries mentionnées, considérées en elle-mêmes, aux fonctions trigonométriques dont elles sont le développement (*).

Nous ferons remarquer, d'après cela, que les relations (6) obtenues plus haut entre les coordonnées de l'hyperbole trouvent leurs analogues en Trigonométrie dans les quatre inégalités suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} 1 > \cos x > 1 - x\sin x, \\ x > \sin x > x\cos x. \end{cases}$$

Ces relations (7), où nous supposerons que l'arc x varie d'une manière continue à partir de zéro, subsistent ensemble pour tous les arcs pris dans le premier quadrant, auquel cas x, $\cos x$, $\sin x$ sont positifs. Elles subsistent encore ensemble lorsque x dépasse le premier quadrant, en restant inférieur à une certaine quantité comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et en ce cas $\cos x$ est négatif. Du reste, à l'exception de la deuxième inégalité que le lecteur démontrera facilement, les formules (7) n'expriment que des relations connues.

Il vient, en les additionnant,

$$1 + x > \cos x + \sin x > 1 + x(\cos x - \sin x),$$

résultat qui a lieu pour les valeurs de x indiquées, et qui a pareillement son corrélatif dans les fonctions hyperboliques.

5. On peut se demander si la formule fondamentale

$$(8)\qquad 1 + x < e^x < 1 + xe^x$$

continue d'avoir lieu d'une manière générale lorsque la variable devient imaginaire.

(*) *Annales de Gergonne*, t. XV, p. 384 (Ampère). — *Analyse algébrique* de Cauchy, chap. IX. — *Nouvelles Annales*, 1re série, t. V, p. 608 (Lemonnier).



Pour répondre à cette question, il nous faut auparavant expliquer dans quel sens doit être entendue l'introduction des imaginaires dans une formule qui n'exprime pas une égalité.

Ainsi qu'il a été dit (3), on ne saurait attacher de sens à des relations d'inégalité établies *à priori* entre des expressions en partie réelles et en partie imaginaires. De ce qu'on a, entre quantités réelles, $A + B > A' + B'$, il serait absurde d'en conclure une relation entre

$$A + B\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad A' + B'\sqrt{-1}.$$

Rien ne s'oppose cependant à ce qu'on écrive

$$A + B\sqrt{-1} > A' + B'\sqrt{-1},$$

quand il nous sera prouvé que $A > A'$, $B = B'$. Mais ces dernières relations ne seront pas entraînées par la première; celle-ci, je le répète, n'aurait aucun sens si elle était posée indépendamment des deux autres.

Cela admis, remplaçons x par $x + y\sqrt{-1}$ dans la formule (8), et faisons attention que

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x e^{y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

La double inégalité prendra la forme

$$\begin{aligned} &1 + x + y\sqrt{-1} < e^x\cos y + e^x\sqrt{-1}\sin y \\ &\quad < 1 + xe^x\cos y - ye^x\sin y + e^x(x\sin y + y\cos y)\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et l'on pourra la regarder comme une conséquence des relations simultanées

$$\begin{aligned} 1 + x < e^x\cos y < 1 + e^x(x\cos y - y\sin y), \\ y = e^x\sin y = e^x(x\sin y + y\cos y), \end{aligned}$$

données *à priori* entre les quantités réelles x, y.

Or, d'après la nature des fonctions e^x, $\cos y$, $\sin y$, ces

relations ne sauraient subsister ensemble pour toutes les valeurs de x qu'en supposant $y=0$, et elles ne subsisteront ensemble d'aucune façon pour y quelconque. Donc la formule (8) n'a lieu d'une manière générale que pour les valeurs réelles de la variable.

6. Si l'on convient d'écrire

$$A + B\sqrt{-1} > A' + B'\sqrt{-1}$$

lorsqu'on a $A > A'$, $B > B'$, les formules (7) peuvent être présentées sous une forme remarquable qu'il est à propos de signaler.

Posons, d'après cette convention,

$$1 + x\sqrt{-1} > \cos x + \sqrt{-1}\sin x > 1 - x\sin x + x\sqrt{-1}\cos x,$$

ce qui n'exprimera autre chose, sinon que ces relations ont lieu séparément entre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ pour toutes les valeurs de x auxquelles s'étend le système (7).

Remplaçons maintenant $\cos x$ et $\sin x$ par leur expressions en fonction des exponentielles imaginaires; il nous viendra

$$1 + x\sqrt{-1} > e^{x\sqrt{-1}} > 1 + x\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}}.$$

Ce résultat singulier revient, comme on voit, à la formule (8), dans laquelle on a renversé le sens des inégalités, et remplacé x par $x\sqrt{-1}$; mais, encore une fois, il ne faut voir là qu'une manière abrégée d'énoncer des relations existantes entre des quantités réelles. En ce sens, la formule qui vient d'être écrite, et où nous supposons que x varie d'une manière continue à partir de zéro, embrasse toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $\alpha\pi$, α désignant un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, et satisfai-

faisant à l'équation.

$$\cos \alpha\pi = 1 - \alpha\pi \sin \alpha\pi.$$

Je n'insisterai pas davantage ici sur ce sujet.

7. Les analogies entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires, en tant que résultant de la comparaison d'équations, ont été étudiées à différentes reprises par les géomètres (*), et il n'y a pas lieu de s'en occuper ici. Mais le sujet n'est pas épuisé, et les développements qui précèdent n'en présenteront pas moins quelque intérêt, surtout au point de vue de l'enseignement. D'abord, ils complètent en quelque sorte les notions qui se rapportent à l'origine analytique de ces quantités. Ils établissent, entre le cercle et l'hyperbole équilatère, de nouvelles analogies fondées sur un genre de relations qui n'avait pas encore été étudié. C'est enfin, d'après les formules posées, qu'on en vient à assigner un sens clair et explicite à la représentation symbolique des fonctions trigonométriques par les exponentielles imaginaires.

(*La suite prochainement.*)

DE LA SÉPARATION DES RACINES;

Par M. Abel TRANSON.

I.

Soit $F(z)$ une fonction algébrique entière dans laquelle les coefficients des diverses puissances de z sont

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 416 : *Notice sur les fonctions hyperboliques et sur quelques Tables de ces fonctions*, par M. Hoüel.



des constantes quelconques, réelles ou imaginaires. Si on y remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, $F(z)$ prendra la forme $P+Q\sqrt{-1}$, où P et Q sont des fonctions algébriques entières et à coefficients réels de x et de y.

Si ensuite on considère x et y comme les coordonnées d'un point rapporté à deux axes rectangulaires ox et oy et situé dans le plan de ces axes, il est évident que les coordonnées de chacun des points de rencontre des deux courbes $P=0$, $Q=0$, donneront les éléments d'une racine correspondante de l'équation $F(z)=0$.

« Ces points, disent MM. Sturm et Liouville, représentent en quelque sorte géométriquement les racines de l'équation $F(z)=0$. (*). » Prouhet les appelait des *points-racines*, et cette dénomination paraît être acceptée dans la science.

Les courbes $P=0$, $Q=0$, et plus généralement toutes celles que représente l'équation

$$aP+bQ=0,$$

où a et b sont des nombres réels quelconques; chacune de ces courbes porte sur son contour tous les points-racines de $F(z)=0$.

Mon objet est de déterminer le nombre des points-racines contenus sur un arc donné de l'une des deux courbes $P=0$, $Q=0$; ou plutôt, c'est de réduire cette détermination à la solution d'une question de calcul, de la même façon que la détermination du nombre des points racines contenus dans l'intérieur d'un contour fermé se trouve réduite aussi, au moyen d'un célèbre théorème de Cauchy, à la réalisation d'un certain calcul.

Je ferai la réduction que j'ai en vue par deux procédés très-différents, et d'abord au moyen de ce théorème de

(*) *Journal de Liouville*, t. I[er], p. 179.

Cauchy auquel je viens de faire allusion. C'est pourquoi il est utile d'en reproduire ici l'énoncé.

Théorème de Cauchy. — *Le nombre des points-racines situés dans l'intérieur d'un contour fermé, en supposant qu'il ne s'en trouve aucun sur ce contour même, est égal à la demi-différence entre le nombre des variations descendantes et ascendantes du rapport* $\frac{P}{Q}$ *pour toute l'étendue du contour supposé parcouru dans le sens direct de rotation. Ce nombre est aussi égal à la demi-différence entre les variations ascendantes et descendantes du rapport inverse* $\frac{Q}{P}$.

Dans cet énoncé on entend que la variation d'une quantité est ascendante lorsqu'elle passe du négatif au positif en s'annulant; descendante si elle passe du positif au négatif. D'ailleurs, on n'a pas égard aux changements de signe (variations) résultant des passages par l'infini. Enfin, le sens d'une rotation est appelé direct lorsqu'un observateur parcourant le contour se trouve avoir l'intérieur de ce contour à sa gauche sous la condition toutefois que le même observateur, étant placé à l'origine et regardant le segment positif de l'axe des x, ait le segment positif de l'axe des y aussi à sa gauche.

II.

Supposons qu'il s'agisse de déterminer le nombre des points-racines situés sur un arc donné de la courbe $Q = 0$.

On peut toujours admettre que les extrémités de cet arc ne sont pas des points-racines, et dès lors il est facile de l'enfermer dans un contour qui n'ait sur son périmètre aucun de ces points, et qui, dans son intérieur,

n'en contienne pas d'autres que ceux qu'on suppose exister sur ce même arc, par conséquent dans un contour qui fera connaître par l'emploi du théorème de Cauchy le nombre demandé.

Pour former ce contour on prendra sur la normale en chaque point, et de chaque côté de ce point, une longueur ε suffisamment petite (infiniment petite). On aura formé ainsi une bande de largeur 2ε, terminée à ses bouts par deux portions de droites et sur ses côtés par deux arcs *parallèles* à l'arc donné.

Pour que le sens du mouvement soit direct, le premier des deux côtés à parcourir dépendra évidemment de celle des deux extrémités d'où l'on part. Mais quelle que soit cette extrémité il est aisé de voir que, sous la condition que les arcs croissent dans le sens du parcours, l'équation de ce premier côté s'obtiendra en remplaçant dans l'équation de la courbe centrale

$$x \quad \text{par} \quad x - \varepsilon \frac{dy}{ds},$$

$$y \quad \text{par} \quad y + \varepsilon \frac{dx}{ds}.$$

Donc, tout le long de ce côté, le dénominateur de la fraction $\frac{P}{Q}$ à laquelle doit être appliqué le théorème de Cauchy, a pour valeur

$$Q = \varepsilon \left(\frac{dQ}{dx} \frac{dy}{ds} - \frac{dQ}{dy} \frac{dx}{ds} \right) \ldots\ldots,$$

expression où l'on néglige d'écrire les termes qui contiennent des puissances supérieures de ε.

D'ailleurs, on a en chaque point de ce parcours, et toujours en négligeant les infiniment petits,

$$\frac{dQ}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dQ}{dy} \frac{dy}{ds} = 0.$$

A l'aide de cette dernière relation, la fraction $\frac{P}{Q}$ prend la forme

$$(A) \qquad \frac{P\frac{dQ}{dy}}{-\varepsilon\frac{dx}{ds}\left[\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2+\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2\right]}.$$

Ainsi il y a d'abord à compter la différence du nombre des variations descendantes à celui des ascendantes que la fonction ci-dessus éprouve tout le long du premier côté, soit de S_1 à S_2.

Si on parcourt les deux bouts rectilignes du contour qui enveloppe l'arc donné, la fonction $\frac{P}{Q}$ passe une fois à chacun de ces bouts par l'infini, mais ne s'évanouit pas; il n'y a donc lieu que d'étudier ce que donne le second contour de la bande, lequel doit être parcouru en sens contraire du premier, c'est-à-dire de S_2 à S_1.

Nous avons dit que la substitution à faire dans l'équation de la courbe centrale pour avoir l'équation de l'un des bords *parcouru dans le sens direct* est toujours la même quelle que soit l'extrémité d'où l'on part, *pourvu que l'arc croisse dans le sens du parcours;* mais si l'on veut conserver aux accroissements de l'arc le même sens que sur le côté antérieurement parcouru, les substitutions seront de

$$x+\varepsilon\frac{dy}{ds} \quad \text{à la place de} \quad x,$$

$$y-\varepsilon\frac{dx}{ds} \quad \text{à la place de} \quad y;$$

et ainsi on aura à compter le long de ce second côté la différence des variations descendantes aux ascendantes

éprouvées par la fonction

$$\frac{P\frac{dQ}{dy}}{+3\frac{dx}{ds}\left[\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2+\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2\right]};$$

ou bien, ce qui est la même chose, éprouvées par cette fonction prise négativement, toutefois en parcourant le second côté, non plus de S_2 à S_1, mais comme le premier côté de S_1 à S_2. En effet, si l'on change à la fois le signe de la fonction parcourue et le sens du parcours, les variations ascendantes, comme les descendantes, conservent leurs signes respectifs.

L'excès du nombre des variations descendantes compté sur le contour entier sera donc égal au *double* des descendantes sur les ascendantes éprouvé par la fonction (A), lorsqu'on parcourt seulement le premier côté de la bande d'une extrémité à l'autre. Ce dernier excès pris une seule fois donnera le nombre des points-racines contenus sur l'arc donné.

Observons maintenant qu'on peut supprimer d'abord dans cette expression (A) le facteur constant et positif $\frac{1}{\varepsilon}$; et ensuite qu'on peut supposer nulle l'épaisseur de la bande, ce qui revient à annuler effectivement les termes qu'on s'est dispensé d'écrire au numérateur et au dénominateur de l'expression (A), comme renfermant des puissances de ε. Observons aussi qu'on peut changer le signe de cette expression à la condition de changer le signe des variations; et enfin qu'en vertu de la relation

$$\frac{dQ}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dQ}{dy}\frac{dy}{ds}=0,$$

qui a lieu en tous les points de l'arc donné, on peut

remplacer le facteur

$$\frac{\frac{dQ}{dy}}{\frac{dx}{ds}\left[\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2+\left(\frac{dQ}{dy}\right)^2\right]}$$

par son équivalent

$$\frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\left(\frac{dQ}{dy}\right)},$$

de sorte que finalement la question que nous avions en vue est résolue par la proposition suivante :

Théorème. — *Le nombre des points-racines contenus sur un arc déterminé de la courbe* $Q=0$, *lorsque les extrémités de cet arc ne sont pas eux-mêmes de tels points, est égal à la différence du nombre des variations ascendantes et descendantes du rapport* $\frac{P\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\left(\frac{dQ}{dy}\right)}$ *pour toute l'étendue de cet arc.*

III.

La règle qu'on vient de formuler serait illusoire si pour quelque point de l'arc en question le numérateur et le dénominateur devenaient nuls en même temps ; par exemple, si l'on avait à la fois $P=0$ et $\frac{dQ}{dy}=0$.

Mais on peut écarter cette supposition au moyen des relations bien connues qui existent entre les dérivées partielles des fonctions P et Q, et qui s'ensuivent de l'identité

$$F(z)=F(x+y\sqrt{-1})=P+Q\sqrt{-1}.$$

En effet, on déduit de cette identité deux expressions différentes de $F'(z)$, savoir :

$$F'(z) = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad F'(z) = \frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\sqrt{-1};$$

d'où résultent les relations, dont il s'agit, savoir :

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} = - \frac{dP}{dy},$$

et en même temps deux autres expressions de $F'(z)$, savoir :

$$F'(z) = \frac{dP}{dx} - \frac{dP}{dy}\sqrt{-1}, \quad \text{et} \quad F'(z) = \frac{dQ}{dy} + \frac{dQ}{dx}\sqrt{-1};$$

d'ailleurs, à cause de la relation déjà utilisée ci-dessus :

$$\left[\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2\right] \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dQ}{dy}\right)^2,$$

on ne peut pas supposer $\frac{dQ}{dy} = 0$, sans avoir en même temps $\frac{dQ}{dx} = 0$, si toutefois on écarte la supposition de $\frac{dx}{ds} = 0$.

Or, la supposition que $\frac{dQ}{dy}$ et $\frac{dQ}{dx}$ sont nulles ensemble revient à $F'(z) = 0$. D'ailleurs, celle de $P = 0$ revient à $F(z) = 0$, puisque les variables x et y sont déjà liées par la relation $Q = 0$; on aurait donc à la fois $F(z) = 0$, et $F'(z) = 0$. Donc on évitera le cas d'exception dont il s'agit, lequel mettrait notre règle en défaut, si l'on a le soin de n'opérer que sur des équations $F(z) = 0$ à racines simples, ce qui est toujours possible.

La fonction $\frac{P\frac{dx}{ds}}{\frac{dQ}{dy}}$ se présenterait encore sous une forme indéterminée si l'on avait $\frac{dx}{ds} = 0$, que P fût d'ailleurs en même temps nul ou différent de zéro, puisque $\frac{dx}{ds}$ ne peut s'annuler qu'avec $\frac{dQ}{dy}$; mais on peut remplacer $\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dQ}{dy}}$ par $\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dP}{dy}}$, ce qui lève la difficulté puisqu'on ne peut pas avoir $\frac{dQ}{dy}$ et $\frac{dP}{dy}$, tous les deux nuls à la fois.

Nota. — On vient de voir que si $F(z) = 0$ est une équation à racines simples, on ne peut pas avoir à la fois

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dy} = 0,$$

ni

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{dQ}{dy} = 0.$$

Il suit de là que les courbes $P = 0$, $Q = 0$, et aussi les courbes $aP + bQ = 0$, où a et b seraient des nombres quelconques, ne peuvent avoir aucuns points singuliers proprement dits, et notamment aucuns points isolés, de sorte que, dans cette même supposition des racines simples, on est sûr de rencontrer tous les points-racines en suivant le périmètre de l'une quelconque de ces courbes.

IV.

La même expression (A) qui convient à la courbe $Q = 0$ est susceptible d'une autre forme qui est très-digne de re-

marque, parce que nous la retrouverons pour toutes les courbes $aP + bQ = 0$, et parce qu'elle nous conduira à une proposition, d'ailleurs bien connue, relative aux racines réelles des équations dont tous les coefficients sont réels.

Voici ce qu'il en est. Supposons que l'on considère les coordonnées x et y d'un point quelconque de la courbe $Q = 0$ comme des fonctions de l'arc s de cette même courbe, on aura d'une part

$$P = \varphi(s),$$

et d'autre part

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dQ}{dy}}{\frac{dx}{ds}};$$

on a donc identiquement

$$\frac{P\,\frac{dx}{ds}}{\frac{dQ}{dy}} = \frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)},$$

de sorte que la solution du problème que nous avions en vue s'exprime sous la forme suivante :

THÉORÈME. — *Le nombre des points racines de l'équation* $F(z) = 0$ *contenus sur un arc déterminé de la courbe* $Q = 0$, *est égal à l'excès du nombre des variations ascendantes sur les descendantes qu'éprouve le rapport* $\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$, *lorsqu'on parcourt l'arc donné.*

En reprenant cette question par une autre méthode, je montrerai ultérieurement que les variations du rapport $\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$ sont toutes ascendantes, et d'ailleurs il n'échappera pas au lecteur que si $\varphi(s)$ est une fonction rationnelle et

entière de s, la question analytique à laquelle se trouve reduite la détermination du nombre des points-racines de l'arc donné, se trouve résolue par le théorème de Sturm. Il suffit même, d'après ce qui a été démontré par ce géomètre à propos du théorème de Cauchy sur les contours, que $\varphi(s)$ soit une fonction rationnelle (*).

Si $F(z) = o$ est une équation à coefficients réels, la fonction Q se décompose en deux facteurs, savoir : y pour le premier, et $f'(x) - \frac{y^2}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$ pour le second. Si l'on cherche les points-racines sur un segment de la ligne $y = o$, ce qui convient exclusivement aux racines réelles, on aura $x = s$, et le rapport $\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$ deviendra $\frac{F(x)}{F'(x)}$; ce qui procure une confirmation de notre théorème.

V.

Si l'on voulait chercher les points-racines contenus sur un arc donné de la courbe $P = o$, on imaginerait d'abord un contour enveloppant cet arc et construit de la même façon que celui dont nous avons entouré un arc de la courbe $Q = o$. Mais ici, pour que les extrémités à bords rectilignes de ce contour ne donnent pas lieu à des variations, on emploiera la seconde forme du théorème de Cauchy, à savoir que *le nombre des points-racines situés dans l'intérieur d'un contour fermé..., est égal à la demi-différence entre les variations ascendantes et descendantes du rapport* $\frac{Q}{P}$.

Et alors, en imitant les calculs précédents, on trouvera que le nombre cherché est égal à l'excès du nombre des variations ascendantes et descendantes qu'éprouve, le long

---

(*) *Voir* Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, 3e édit., t. Ier, p. 289.

de l'arc donné, la fonction

$$\frac{Q\,\frac{dy}{ds}}{\frac{dP}{dx}};$$

et de nouveau, si les coordonnées d'un point quelconque de l'arc sont considérées comme fonctions de l'arc lui-même exprimé par s, de sorte qu'on puisse représenter Q par $\varphi(s)$, on verra que l'expression précédente équivaut à $\frac{\varphi(s)}{\varphi'(s)}$.

VI.

Enfin, on sera conduit encore à la même règle, si l'on cherche le nombre des points-racines contenus sur un arc d'une des courbes

$$aP + bQ = 0.$$

Il suffit de rappeler la remarque ingénieuse due à M. L. Prouhet, que les racines de

$$(a + b\sqrt{-1})\quad F(z) = 0$$

étant manifestement les mêmes que celle de $F(z) = 0$, on peut considérer le résultat de la substitution de $x + y\sqrt{-1}$ à z comme donnant

$$aP - bQ + (aQ + bP)\sqrt{-1} = 0.$$

Et, en effet, si on pose

$$aP - bQ = P_1 \quad \text{et} \quad aQ + bP = Q_1,$$

les deux fonctions P_1 et Q_1 ont entre elles les mêmes relations que P et Q; dès lors les règles pour trouver le nombre des points-racines de $F(z) = 0$ contenus sur des arcs donnés de $P_1 = 0$ ou de $Q_1 = 0$, seront les mêmes (*mutatis mutandis*) que pour des arcs de $P = 0$, ou de $Q = 0$.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 437

(voir tome XVII, page 188);

PAR M. VENCESLAS NIÉBYLOWSKI,
Élève de spéciales au lycée Bonaparte.

O_1 est une circonférence décrite sur un rayon de la circonférence O comme diamètre, on fait rouler O autour de O_1. On demande :

1° *Le lieu décrit par un point quelconque du plan* O.

2° *L'enveloppe d'une droite quelconque liée invariablement à la circonférence* O (*). (MANNHEIM.)

1° Je mène le rayon O_1A qui passe par le point M du plan O, et je suppose que dans sa position initiale la circonférence O soit tangente en A à O_1. Trois cas peuvent se présenter, suivant que le point M est situé intérieurement à O, ou extérieurement, ou sur cette circonférence. Supposons M intérieur, soit un rayon OB′B quelconque, on sait que l'arc AB égale l'arc AB′; donc, dans la rotation de O, quand B vient en B′, O vient en O′ extrémité du diamètre $B'O_1$; de plus, après la rotation, la droite OA prendra la position O′A et M viendra en M′ tel que O′M′ égale OM.

Tout revient donc à joindre un point quelconque I de la circonférence O_1 au point A, puis de porter, à partir de I sur IA, une longueur égale à OM. Le lieu du point M est donc un limaçon de Pascal.

Suivant les trois positions de M relatives au cercle O, on aura une des trois formes différentes de la conchoïde du cercle.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

2° J'abaisse de O_1 une perpendiculaire sur la droite donnée, d'après ce qui précède le pied M de cette perpendiculaire décrit dans le mouvement de O un limaçon de Pascal. Tout revient donc à trouver l'enveloppe des perpendiculaires MC menées au rayon vecteur AM de l'origine A, or on sait que l'enveloppe de ces droites est une circonférence ayant son centre en O et pour rayon OM. C'est d'ailleurs un moyen connu d'obtenir la conchoïde du cercle : *on donne un cercle et un point fixe* A, *une tangente mobile* CM *roule sur le cercle, et du point* A *on abaisse* AM *perpendiculaire sur cette tangente*, M *décrit un limaçon de Pascal dont le cercle directeur a pour diamètre la distance de* A *au centre du cercle donné.*

On peut trouver facilement ce résultat par le calcul. En effet, en prenant A pour origine, AO_1 pour polaire, l'équation du limaçon est

$$\rho = a + b\cos\omega,$$

celle de MC perpendiculaire à AM est

$$\rho = \frac{a + b\cos\omega}{\cos(\omega - \alpha)}.$$

D'après la théorie des enveloppes, dérivons, il vient

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{b}{a}\sin\alpha,$$

d'où

$$\cos(\omega - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha};$$

développons $\sin(\omega - \alpha)$ et élevons au carré, on obtient

$$\cos^2\omega + \frac{2b}{a}\sin^2\alpha\cos\omega + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0,$$

$$\cos\omega = -\frac{b}{a}\sin^2\alpha + \cos\alpha\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha}.$$

Substituons $\cos\omega$ et $\cos(\omega - \alpha)$ dans la valeur de ρ, il vient en simplifiant

$$\rho = \sqrt{a^2 - b^2\sin^2\alpha} + b\cos\alpha,$$

$$\rho^2 - 2b\rho\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0,$$

si l'on revient aux coordonnées cartésiennes,

$$y^2 + (x - b)^2 = a^2,$$

équation d'un cercle dont le centre est le point O_1, car $AM = b$, et le rayon AO, car $AO = a$.

Note. — La même question a été résolue géométriquement avec élégance par MM. Berquet et Jouffroy, élèves du lycée de Lyon.

Question 818

(voir 2e série, tome VI, page 335);

Par M. TOUREN,
Répétiteur au lycée de Grenoble,

Et M. A. QUITTERAY,
Lieutenant de chasseurs à pied.

Si l'on envisage une chaînette dont la densité soit en raison de la courbure, et un arc quelconque symétrique par rapport au sommet, le centre de gravité de cet arc sera sur l'axe de la courbe à une hauteur au-dessus de la directrice marquée par le rapport de l'abscisse à l'inclinaison extrême.

(Haton de la Goupillière.)

Soient ρ le rayon de courbure, $\frac{ds}{\rho} = d\omega$ l'angle de contingence, y_1 l'ordonnée du centre de gravité, c'est-à-dire la hauteur de ce centre de gravité au-dessus de la directrice. On aura

$$(1) \qquad y_1 \int d\omega = \int y \frac{ds}{\rho},$$

puisque dans la chaînette le rayon de courbure est égal à la normale, on a

$$\rho = y\frac{ds}{dx},$$

et la formule (1) devient

$$y_1\int d\omega = \int dx.$$

En intégrant entre les limites correspondantes aux extrémités M et M′ d'un arc symétrique par rapport au sommet, on trouve

$$2\omega y_1 = 2x,$$

d'où

$$y_1 = \frac{x}{\omega}.$$

Note. — Solutions analogues de MM. Léon Geoffroy, élève de l'École Centrale; Pellet, élève du lycée de Nîmes; Lucien Bignon, de Lima.

Question 834

(voir 2e série, t. VI, p. 480);

PAR M. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

Si a et b sont les deux axes d'une ellipse, R, R_1 *les rayons de deux cercles osculateurs, d la distance de leurs centres, p la distance du centre de l'ellipse à l'axe radical des deux cercles, on a la relation*

$$2dp = 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right).$$

(L. PAINVIN.)

Soit $(a\cos u, b\sin u)$ un point de l'ellipse, le cercle osculateur en ce point a pour équation

$$\left(x - \frac{c^2\cos^3 u}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{c^2\sin^3 u}{b}\right)^2 = \frac{(b^2 + c^2\sin^2 u)^3}{a^2 b^2},$$

ou, en développant,

$$x^2 - 2\frac{c^2\cos^3 u}{a}x + y^2 + 2\frac{c^2\sin^3 u}{b}y - 3c^2\sin^2 u + a^2 - 2b^2 = 0,$$

mais

$$R^2 = \frac{(b^2 + c^2\sin^2 u)^3}{a^2 b^2};$$

donc

$$b^2 + c^2\sin^2 u = (abR)^{\frac{2}{3}},$$

et l'on peut écrire l'équation qui précède de la manière suivante

$$(1)\quad x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y - 3(abR)^{\frac{2}{3}} + a^2 + b^2 = 0,$$

α, β étant les coordonnées du centre.

L'équation d'un autre cercle osculateur est

$$(2)\quad x^2 - 2\alpha_1 x + y^2 - 2\beta_1 y - 3(abR_1)^{\frac{2}{3}} + a^2 + b^2 = 0.$$

L'axe radical des cercles (1) et (2) est la droite

$$2(\alpha_1 - \alpha)x + 2(\beta_1 - \beta)y + 3(ab)^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

D'après une formule connue, la distance de l'origine à cette droite (p) est égale à

$$\frac{3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right)}{2\sqrt{(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\beta_1 - \beta)^2}},$$

or

$$d = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\beta_1 - \beta)^2},$$

donc

$$2pd = 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(R_1^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}}\right).$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Alfred Giard, Henri Ledoux, L. Redovez, élèves du lycée de Douai.

Question 835

(voir 1re série, t. VI, p. 480);

PAR M. AUGUSTE MACÉ,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Une sphère et un plan étant donnés, démontrer que toutes les sphères décrites des différents points du plan comme centre, avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à la sphère donnée, passent par un point fixe, et déterminer ce point (*).

(VITTORIO SANNDI.)

Soit O le centre de la sphère donnée, et soit Q le plan donné; de O abaissons la perpendiculaire OA sur le plan, et soit A le pied de cette perpendiculaire; si le théorème est vrai, c'est-à-dire s'il existe un point fixe, ce point, pour une raison de symétrie, devra se trouver sur la perpendiculaire OA, et à une distance de A, AP, égale à la tangente AB. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver qu'une sphère décrite d'un point quelconque M du plan passe en P; soit MT la tangente, menons MO et MP; il suffit de prouver que

$$MT = MP.$$

Or

$$\overline{MT}^2 = \overline{MO}^2 - R^2,$$

R étant le rayon de la sphère donnée. Dans le triangle MOP, on a

$$\overline{MP}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OP}^2 - 2OP\,AO,$$

mais

$$OP = AO - AP \quad \text{et} \quad \overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 - R^2,$$

donc on aura

$$\overline{MP}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{AO}^2 = \overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MT}^2,$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

ce qu'il fallait démontrer. Donc toutes les sphères décrites des divers points du plan comme centres, avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à la sphère donnée, passent par le point fixe P, et ce point est déterminé par la relation

$$\overline{AP}^2 = \overline{AO}^2 - R^2 \ (*).$$

Note. — Solutions analogues de MM. Édouard Duviviers; Léon Geoffroy, élève de l'École Centrale; Willière de Thuin; Ch. Dupain, professeur; Julien Boulanger, élève au lycée de Dijon (classe de M. Marquet); Alfred Giard; Herment, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout); L. Henning, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout); H. Schefer, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); E Besson, étudiant en droit; Paul Endrès, élève du lycée de Douai; Jules Barbier, élève du lycée de Grenoble; Georges de Villepin, élève du collége Stanislas (classe de M. Gros); Morges, élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); Andry, élève de l'École de Sainte-Barbe (classe de M. Bourgeois) Jaricot; Welsch, élève du lycée de Metz.

QUESTIONS.

839. F (x) étant une fonction rationnelle et entière du degré n; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ étant des valeurs quelconques de x en nombre p, et p étant plus grand que $n+1$; enfin, $f(x)$ représentant le produit

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p),$$

on a toujours

$$\sum_{x_1}^{x_p} \frac{F(x)}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = 0.$$

(J.-J.-A. Mathieu.)

(*) Le symétrique du point P par rapport au plan répond aussi évidemment à la question. B.

840. On donne un cercle et un point O fixe sur la circonférence ; par ce point on mène une corde arbitraire OM sur la direction de laquelle on porte une longueur ON, telle que $ON^2 = OM^2 +$ const. ; par le point N, on mène une perpendiculaire à ON : trouver l'enveloppe de cette perpendiculaire. (DUPAIN.)

841. La forme d'équilibre d'un fil pesant dont la densité varie en raison inverse du carré de la longueur est une chaînette ordinaire, inclinée de manière que sa tangente soit verticale à l'origine des densités.

Si cette origine recule indéfiniment sur la courbe, le fil devient homogène et l'axe de la chaînette se replace verticalement. On retrouve ainsi le cas ordinaire.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

842. *Hexagramme de Pascal* (*réciproque*). — Si trois angles ont leurs sommets en ligne droite, leurs côtés sont les côtés opposés d'un hexagone inscriptible dans une conique.

J.-E. BARBIER, ancien élève de l'École Normale.

843. *Géométrie de la règle. Propositions à démontrer.* — Si l'on joint les sommets d'un triangle à un point O intérieur par trois droites, les pieds de ces trois droites déterminent un second triangle inscrit dans le premier, qui comprend en outre trois autres triangles, puis un troisième inscrit de même dans le second, qui comprend en outre trois autres triangles, et ainsi de suite. On demande de démontrer que :

1° Les côtés de tous ces triangles concourent en trois points P, I, E qui sont sur une ligne droite D ; j'appelle e, p, i les points où les droites qui concourent en O coupent cette droite D.

2° Dans l'intérieur de chacun des triangles énumérés,

il existe un point tel, que, si on le joint aux sommets par des droites, ces lignes passent aux points e, p, i.

3° Les points ainsi obtenus sont trois à trois sur des lignes droites qui passent par des points P, I, E.

4° On peut former ainsi un quinconce géométrique dont les allées donnent vue sur des points remarquables de la ligne D. On demande de démontrer encore qu'on peut construire un nouveau quinconce en conservant les mêmes points remarquables (savoir P, I, E et leurs compagnons e, p, i), tout en prenant un nouveau point O′ pour point de départ de toute la construction.

J.-E. Barbier.

CORRESPONDANCE.

1. M. Georges Dostor, professeur à l'île de la Réunion, nous adresse une Note sur les mesures du cône et du tronc de cône, nous en extrayons les énoncés des théorèmes suivants, qui peuvent servir d'exercices aux élèves de Mathématiques élémentaires.

Théorème I. — *La surface totale d'un cône est égale à la surface latérale d'un second cône de même base que le premier, ayant pour côté le côté du premier cône augmenté de son rayon de base.*

Théorème II. — *La surface totale d'un tronc de cône est égale à la somme des surfaces totales de deux cônes de même côté que le tronc, et ayant pour bases l'un la base inférieure et l'autre la base supérieure du tronc de cône.*

Théorème III. — *Le volume d'un cône est égal à la surface latérale multipliée par le tiers de la distance de*

la génératrice à un point quelconque de la hauteur, plus la base multipliée par le tiers de la distance de cette base au même point.

THÉORÈME IV. — *Le volume du cône est égal à la surface latérale multipliée par le tiers de la distance du centre de la base à l'arête latérale.*

THÉORÈME V. — *Le volume du tronc de cône est égal à la surface latérale multipliée par le tiers de la distance de la génératrice à un point quelconque de l'axe, plus deux cônes ayant pour bases celles du tronc et par hauteurs respectives les distances du même point à ces deux bases.*

2. M. Painvin nous adresse une nouvelle solution de la question 752 (*voir* 2e série, t. VI, p. 510).

On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré telle, que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point. On demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe. Lieu du pied de la quatrième normale.

Le savant professeur de Douai fait usage des coordonnées trilatères, qui paraissent parfaitement appropriées à la question. Ses formules sont symétriques et mettent bien en évidence les propriétés principales de la dernière courbe.

Voici celles qui se trouvent énoncées dans sa Note.

1° La courbe est du septième ordre.

2° Elle passe par les points circulaires à l'infini, lesquels sont des points doubles ordinaires pour cette courbe.

3° La courbe passe par les trois sommets du triangle donné. Ces sommets sont des points triples ordinaires.

4° La courbe est au plus de la vingtième classe.

5° Le cercle circonscrit au triangle doit rencontrer la

courbe en quatorze points. Les points circulaires à l'infini comptent chacun pour deux; les sommets du triangle comptent chacun pour trois.

6° Lorsque les trois points donnés forment un triangle isocèle, la courbe se réduit au sixième ordre, après avoir supprimé un facteur que donne la bissectrice intérieure du sommet du triangle isocèle. Cette solution particulière correspond aux coniques qui auraient pour sommet celui du triangle.

7° Lorsque le triangle donné est équilatéral, la courbe du septième ordre se compose alors des trois bissectrices intérieures et de deux cercles confondus avec le cercle circonscrit au triangle.

3. M. Folie. — *Nouvelle manière de présenter la divisibilité des nombres.*

L'auteur s'est proposé de rendre la théorie de la divisibilité des nombres indépendante de celle de la recherche du plus grand commun diviseur, et de formuler un principe qui permette de découvrir les caractères de divisibilité d'un nombre par un nombre premier d'une manière immédiate et applicable à tous les systèmes de numération, sans qu'il soit nécessaire de chercher les restes de la division des puissances de la base par ce nombre premier.

Nous ne pensons pas, comme l'auteur, que la méthode classique soit imparfaite parce qu'elle est fondée sur la recherche du plus grand commun diviseur.

4. M. Genocchi nous prie de signaler aux lecteurs des *Nouvelles Annales* les fautes d'impression suivantes, qui se sont glissés dans son article du tome VI (2ᵉ série), p. 5.

Page 7, ligne 21, *au lieu de* $(x-a)^{2n}$, *lisez* $(x-a)^{2n-2}$.
Page 8, ligne 18, *au lieu de* fx, *lisez* $f^r x$.
Page 8, ligne 20, *au lieu de* $f(x)$, *lisez* $f^r(x)$.



Page 9, ligne 1, *au lieu de* $x - a + \varepsilon$, *lisez* $x = a + \varepsilon$.
Page 10, ligne 5, *au lieu de* Car, *lisez* Or.
Page 15, ligne 7, *au lieu de* ce premier, *lisez* le premier.
Page 16, ligne 5, *au lieu de* $f(x) G_r(x)$, *lisez* $f^r(x) G_r(x)$.
Page 16, ligne 17, *au lieu de* $F_1(x)$, *lisez* $F_r(x)$.
Page 19 ligne, 2, *au lieu de* $a + \varepsilon$, *lisez* $a - \varepsilon$.

5. Nous recevons de M. Laurent, inspecteur de l'Académie de Clermont, un *Essai sur la Théorie des Parallèles*. L'auteur, préoccupé de la forme négative qu'affecte la définition ordinaire des parallèles, propose ce nouvel axiome : *Si deux droites tracées dans un plan s'éloignent dans un sens, elles se rapprochent dans l'autre*; puis, *afin de soustraire la définition aux conditions excentriques d'un prolongement indéfini*, il dit : *Deux droites sont parallèles quand elles sont à égale distance l'une de l'autre*; et il part de là pour faire, à son point de vue, une théorie des parallèles sans *postulatum*.

6. Nous avons reçu, mais trop tard pour en faire mention, la solution de la question 830 par MM. Henri Ledoux, élève du lycée de Douai; Sandier et Rebuffet, élèves à l'École des Mines de Saint-Étienne.

7. M. Alphonse Ellie, maître répétiteur au lycée de Bordeaux, nous a adressé une solution très-simple de la question proposée au concours d'admission à l'École Normale supérieure (*voir* 2e série, t. VI, p. 489). Nous regrettons que l'abondance des matières ne nous permette pas de l'insérer.

8. Les solutions de la question 825 (*voir* 2e série, t. VI, p. 556) par MM. Joanne, professeur à Caen; Desroziers, élève de l'École préparatoire de Sainte-Barbe (cours de M. Moutard); Lesquier, élève du lycée de Caen; Henri Ledoux, élève du lycée de Douai, nous sont parvenues trop tard pour être mentionnées dans le numéro de décembre 1867. J. B.

ÉTUDE DES SURFACES ALGÉBRIQUES

(voir p. 5).

La surface des ondes, qui s'est offerte à Fresnel dans ses recherches d'optique, a été, au point de vue de la géométrie pure, le sujet d'études très-intéressantes.

La recherche de son équation et l'étude de sa forme n'exigent que l'emploi des méthodes les plus élémentaires; pour les mettre en œuvre, cependant, toute l'habileté des maîtres les plus illustres n'a pas été superflue. L'application régulière des principes généraux peut fournir la solution du problème, et le moindre étudiant a, comme diraient les théologiens de la première provinciale, le pouvoir prochain de la résoudre; mais l'habileté suffisante pour en faire usage est une grâce qui n'est pas donnée à tous. Fresnel lui-même, qui en a deviné le résultat, n'en a pas démontré l'exactitude.

Ampère n'a pas dédaigné de s'exercer à refaire le calcul, simplifié depuis par Cauchy, par M. A. Smith, par M. Lamé et par M. Sylvester, et remplacé, pour les amis de la géométrie pure, par une très-ingénieuse et très-élégante démonstration de Mac Cullach. Fresnel, en donnant l'équation de la surface, avait indiqué, pour chacun de ses points, une construction géométrique très-simple. Que l'on considère un ellipsoïde et par le centre un plan sécant quelconque auquel on élève une perpendiculaire égale en longueur à l'un des deux axes de l'ellipse de section : le lieu des points ainsi obtenus est la surface des ondes.

Nous n'avons pas à dire ici comment Hamilton a découvert les singularités remarquables de cette surface, rattachées bientôt par Mac Cullach à la construction pré-

cédente. La surface des ondes contient quatre points singuliers correspondant aux sections circulaires de l'ellipsoïde et pour lesquels le plan tangent est indéterminé, et quatre plans tangents, qui, chacun, les touchent suivant la circonférence d'un cercle.

Les conséquences de ces théorèmes et les brillantes expériences d'optique auxquelles ils ont conduit leur assurent, indépendamment de leur élégance propre, une mention toute spéciale dans l'histoire de la science.

M. Cayley, dont l'habileté dans la combinaison des formules algébriques n'a jamais peut-être été surpassée, s'est proposé, à l'occasion de la surface des ondes, comme il l'a fait pour un grand nombre de problèmes célèbres, la généralisation de ces résultats si élégants et bien vite devenus classiques.

La surface plus générale qu'il nomme *tétraédroïde* est aussi du quatrième ordre. Elle est coupée par les plans d'un certain tétraèdre, suivant des paires de coniques, par rapport auxquelles les trois sommets du tétraèdre, situés dans ce plan, sont des points conjugués. De plus, les seize points d'intersection des quatre paires de coniques sont des points singuliers, en chacun desquels le plan tangent est remplacé par un cône de second degré.

La polaire réciproque d'une tétraédroïde est une tétraédroïde. Les seize cônes qui touchent la surface aux seize points singuliers sont circonscrits quatre à quatre à quatre surfaces du second ordre, et les seize courbes de contact des plans singuliers sont situées quatre à quatre sur quatre surfaces du second ordre.

On déduit de cette surface la surface des ondes de Fresnel, en la transformant homographiquement, de manière que l'un des plans du tétraèdre passe à l'infini, que les trois autres deviennent rectangulaires, et que trois des coniques d'intersection se réduisent à des cercles.

Les surfaces de quatrième ordre, étudiées de nouveau par l'un des plus habiles géomètres contemporains, M. Kummer, ont été pour lui l'occasion de l'un de ces Mémoires, dans lesquels, sous une forme tout élémentaire, on reconnaît la main d'un maître.

Le principe sur lequel il s'appuie est le suivant :

Si une section plane d'une surface du quatrième ordre a un point singulier, le plan sécant est un plan tangent à la surface au point singulier de la section, à moins que celui-ci ne soit en même temps un point singulier de la surface. Lorsqu'un plan coupe une surface de quatrième degré suivant une conique, l'intersection se compose nécessairement de deux coniques, et leur ensemble, considéré comme courbe du quatrième degré, a nécessairement quatre points doubles. Si l'une des coniques se réduit à deux droites, le nombre de ces points s'élève à cinq, et il devient enfin égal à six lorsque les deux coniques se transforment en quatre droites. Réciproquement, si l'intersection d'un plan avec une surface du quatrième degré contient quatre ou un nombre plus grand de points doubles, elle se décompose nécessairement en lignes de degré inférieur à quatre, car une courbe irréductible de quatrième degré ne peut jamais avoir plus de trois points doubles. Lorsque le nombre des points doubles est égal à quatre, et que trois d'entre eux ne sont pas en ligne droite, l'intersection se réduit nécessairement à deux coniques; lorsque trois sont en ligne droite, elle se compose de cette droite elle-même et d'une ligne de troisième ordre. Si le nombre des points doubles est cinq, l'intersection se compose de deux lignes droites et d'une conique, et lorsqu'il est six enfin, de quatre lignes droites.

Partant de ces principes, M. Kummer recherche toutes les surfaces du quatrième degré sur lesquelles se trouvent un nombre infini de coniques.

La première classe est celle des surfaces coupées suivant des coniques par des plans qui ne sont pas tangents.

Elles comprennent :

1° Toutes les surfaces ayant une courbe double du second degré et deux points doubles isolés :

Les plans passant par ces points les coupent suivant deux coniques;

A cette classe appartiennent le tore et la cyclide;

2° Les surfaces ayant une droite double :

Tous les plans passant par cette droite la coupent suivant des coniques ;

3° Les surfaces qui se touchent elles-mêmes en deux points différents :

Elles sont coupées par les plans passant par ces deux points suivant des paires de coniques qui se touchent en ces points.

En résumé, si une série de plans non tangents à une surface du quatrième ordre la coupe suivant des coniques, tous ces plans passent nécessairement par une même droite.

Lorsque les plans qui coupent les surfaces suivant les coniques sont tangents à la surface, celle-ci peut appartenir à plusieurs genres distincts :

1° Les surfaces qui possèdent trois lignes droites doubles passant par un seul et même plan sont coupées par tous leurs plans tangents suivant des paires de coniques :

Les surfaces de ce genre ont été considérées par Steiner, qui, sans rien publier de ses recherches, a verbalement indiqué leurs propriétés à plusieurs de ses amis;

Le point de vue sous lequel elles se sont présentées à lui est fort différent de celui de M. Kummer ;

2° Les surfaces sur lesquelles se trouve une ligne double du second ordre, et en outre un seul point double :

Tous les plans tangents menés par ce point double la coupent suivant des coniques;

3° Il existe enfin des surfaces coupées suivant des coniques par leurs plans tangents doubles; ce sont celles qui ont une ligne double de second ordre.

Une autre classe intéressante de surfaces est celle des développables circonscrites à deux surfaces du second degré.

Lorsque les surfaces considérées sont deux sphères, la développable circonscrite se réduit à deux cônes, dont on sait l'importance dans la théorie des éclipses. Pour étudier de plus près la question d'astronomie, Laplace, dans la *Mécanique céleste,* cherche à remplacer les deux sphères par des ellipsoïdes; mais les formules qu'il donne sont seulement approchées et n'avancent que très-peu la question de géométrie pure traitée pour la première fois par M. Poncelet avec toute la pénétration et la perspicacité géométrique qui brillent à un si haut degré dans le beau Mémoire où ce problème figure incidemment.

Il montre que la surface développable circonscrite à deux surfaces de second ordre offre, en général, quatre lignes de striction simples, distinctes, planes et du second ordre seulement.

Les courbes de contact des deux surfaces avec les développables circonscrites sont des courbes de quatrième ordre, placées à l'intersection des surfaces proposées et de deux autres surfaces, comme elles, du second degré.

La surface elle-même est du huitième ordre seulement, comme M. Chasles l'a montré le premier dans son *Aperçu historique.*

Cette surface est, on le prouve aisément, circonscrite à un nombre infini de surfaces du second ordre, auxquelles cette circonstance donne un grand nombre de propriétés communes. Elles ont, par exemple, leurs cen-

tres en ligne droite, et, plus généralement, tous les pôles d'un même plan, par rapport à ces diverses surfaces, forment toujours une ligne droite; les diamètres conjugués aux plans diamétraux parallèles à un plan donné forment un paraboloïde, et chacune d'elles enfin coupe la développable circonscrite suivant huit de ses génératrices. Ces théorèmes sont dus à MM. Poncelet, Cremona, Salmon et de la Gournerie. Quoique énoncés en langage géométrique, ils ont, comme toutes les propositions analogues relatives aux surfaces algébriques, de véritables relations analytiques dont la généralité, qui ne souffre aucune restriction, force à considérer en même temps et à assigner le même caractère aux figures dans lesquelles les propriétés considérées appartiennent à des éléments imaginaires.

M. Chasles, par exemple, démontre cette proposition dont il déduit, avec un grand nombre de conséquences importantes et nouvelles, toute une théorie des surfaces homofocales du second degré.

Toutes les surfaces homofocales du second ordre sont inscrites dans une même surface développable, dont l'une des coniques doubles est le cercle imaginaire situé à l'infini.

L'étude des surfaces circonscrites à deux surfaces du second ordre est inséparable de celle de la courbe d'intersection de deux telles surfaces et de la développable dont elle est l'arête de rebroussement. Les liens établis entre les deux problèmes par la théorie des polaires réciproques sont tels, en effet, que tout résultat relatif à l'un d'eux en fournit aussitôt un autre d'importance égale relatif à l'autre.

Cette surface possède quatre lignes doubles planes du quatrième ordre, comme l'ont montré MM. Chasles et Salmon; elle est, en général, du huitième ordre, mais

peut, dans certains cas, comme l'a démontré M. Cayley, s'abaisser au sixième ordre.

M. de la Gournerie a été conduit, par son enseignement et par ses études de géométrie descriptive, à s'occuper de la développable circonscrite à deux surfaces du second degré, qui se présente non-seulement dans la théorie des éclipses, mais dans certaines questions de terrassement. Trois des coniques doubles sont concentriques; la quatrième disparaît et passe à l'infini. L'intersection des plans de deux quelconques des premières est perpendiculaire au plan de la troisième, et leurs projections horizontales sont des coniques homofocales (*).

Plusieurs épures de son *Traité de Géométrie descriptive* et un modèle en fils, montrant dans un cas intéressant l'agencement des nappes de la surface, indiquent d'ailleurs le point de vue principalement pratique auquel le savant s'est placé dans ses premiers travaux. Dans l'ouvrage dont le titre figure en tête de cet article, M. de la Gournerie, prenant pour point de départ l'étude des surfaces développables circonscrites à deux surfaces du second ordre, cherche à les généraliser en étendant à des surfaces réglées non développables quelques-unes de leurs propriétés les plus remarquables, et cette extension suffirait, comme l'a dit M. Chasles, pour fixer l'attention des géomètres sur le Mémoire qui lui est consacré.

La surface nouvelle que M. de la Gournerie nomme *quadrispinale* est du huitième ordre; elle a quatre coniques doubles, dont l'une est située à l'infini, et une autre ligne double du douzième ordre. Deux quelconques des coniques doubles suffisent d'ailleurs pour construire la surface et pour la définir; lorsqu'on la considère comme engendrée par une ligne droite qui s'appuie sur trois co-

(*) M. Cremona a donné de remarquables démonstrations de ces théorèmes dans le t. IV, 2e série, des *Nouvelles Annales*, p. 271.

niques, il est nécessaire d'établir entre celles-ci une certaine dépendance, sans laquelle la surface deviendrait du seizième ordre et ne serait plus une quadrispinale; lorsque les conditions sont remplies, la surface, toujours du seizième ordre, se décompose en deux quadrispinales.

M. de la Gournerie, dans un autre Mémoire, étudie la surface corrélative de la quadrispinale, et qu'il nomme *quadricuspidale,* parce qu'elle possède quatre points quadruples, qu'il regarde comme des sommets, et qui sont les sommets de quatre cônes du second ordre doublement circonscrits à la surface; cette nouvelle surface possède cinq lignes doubles du quatrième ordre : l'une est gauche et les autres planes. Chacune de celles-ci passe par trois des quatre sommets de la surface, et a, en chacun de ces points, un point double.

L'examen très-approfondi de ces deux surfaces, les relations de la quadrispinale avec une série d'hyperboloïdes dont chacune a avec elle huit génératrices communes et qui sont toutes inscrites dans une même développable, l'examen particulier du cas où la quadrispinale se réduit à deux surfaces de quatrième ordre, et les généralisations fort étendues qui composent un second Mémoire, forment un ensemble intéressant de recherches dont le résumé, même sommaire, ne peut cependant trouver place dans le *Journal des Savants*. Nos lecteurs géomètres nous sauront gré de les leur avoir signalées.

Plusieurs des résultats contenus dans cet ouvrage ont attiré l'attention de M. Cayley, dont les remarques intéressantes, placées à la fin de chaque Mémoire, sont à la fois un ornement pour le livre, et, pour notre savant compatriote, le témoignage, non moins précieux que dignement mérité, de l'estime particulière du grand géomètre anglais. J. Bertrand.

(Extrait du *Journal des Savants.*)

DE LA SÉPARATION DES RACINES

(voir p. 25) ;

PAR M. ABEL TRANSON.

VII.

J'ai annoncé qu'on pouvait parvenir à ces résultats par une autre méthode.

J'observe d'abord que $F(z)$ devenant $P+Q\sqrt{-1}$ par la substitution de $x+y\sqrt{-1}$ à la place de z, on peut représenter les états successifs de la fonction $F(z)$ par la situation variable d'un point dont les abscisse et ordonnée sont respectivement P et Q, de la même façon que les états successifs de la variable indépendante z sont représentés par la situation du point (x, y).

Ou mieux encore, on peut considérer d'une part la variable z comme représentée *en grandeur et en direction* par le rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point (x, y); et d'autre part la fonction par le rayon vecteur qui va de l'origine au point dont l'abscisse est P et dont l'ordonnée est Q (*).

(*) Cette idée de représenter (*de réaliser*) les quantités imaginaires par des *longueurs inclinées* est celle à laquelle Cauchy, après avoir varié plusieurs fois sur la façon d'expliquer l'emploi des imaginaires dans le calcul, s'est finalement arrêté. On sait aussi le grand parti que cet illustre géomètre, et plusieurs autres à sa suite, ont su tirer de cette conception pour perfectionner la théorie des séries, des intégrales définies, des fonctions doublement périodiques, etc. D'ailleurs on doit reconnaître que l'élégante systématisation du calcul des imaginaires résultant de la distinction du *module* et de l'*argument*, dès longtemps établie par Cauchy lui-même, était bien propre à faciliter l'acceptation de l'idée nouvelle, puisque ces deux éléments ne sont autre chose que la *longueur* et l'*incli-*

D'après cela, si on imagine que l'extrémité de la variable trace sur le plan des coordonnées un chemin quelconque, l'extrémité de la fonction parcourra un chemin correspondant. Et notamment, si l'extrémité de la variable décrit l'un des chemins

$$Q = o, \quad P = o \quad \text{ou} \quad aP + bQ = o,$$

l'extrémité de la fonction demeurera constamment, dans le premier cas, sur l'axe des x; dans le second cas, sur l'axe des y; et, dans le troisième cas, sur une droite menée par l'origine et dont le coefficient angulaire serait exprimé, selon la géométrie analytique, par l'expression $-\frac{a}{b}$.

Ceci entendu, reprenons notre problème sous sa forme générale; c'est-à-dire déterminons le calcul à faire pour trouver le nombre des points-racines de l'équation $F(z) = o$ qui sont situés sur un arc de la courbe $aP + bQ = o$.

Si, conformément à une indication de Prouhet déjà mentionnée ci-dessus, on multiplie $F(z)$ par $b + a\sqrt{-1}$,

---

naison de la grandeur RÉELLE que la géométrie fait désormais correspondre à des symboles algébriques pendant si longtemps *dénués de toute signification*! Néanmoins, ce serait, je le crois, manquer à la justice que d'attribuer à Cauchy le mérite d'avoir introduit une conception dont on se plait à reconnaître l'importance depuis qu'elle a obtenu l'appui d'une si haute autorité scientifique, mais enfin une conception que plusieurs auteurs, à la vérité peu illustres, préconisaient vainement depuis bien longtemps; qui, par Mourey et par M. Faure, professeur émérite du lycée de Gap, avait déjà produit deux démonstrations très-simples du principe fondamental de la théorie des équations. Ce serait, dis-je, manquer à la justice, lorsque la vérité a été enfin intronisée, d'oublier ceux qui l'ont à leurs risques et périls tirée du puits! Et pour couper court, je constate que Cauchy lui-même, en affirmant pour la première fois la nouvelle doctrine, n'a pas omis de citer ceux qui en avaient préparé l'avénement : Buée, Argant, Mourey, MM. Faure (de Gap) et Vallès (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXII). AB. TR.

et qu'on représente le produit par $\varphi(z)$, les points-racines de $\varphi(z)=0$ seront les mêmes que ceux de $F(z)=0$; d'ailleurs on aura identiquement

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = bP - aQ + (aP + bQ)\sqrt{-1},$$

ou bien

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = P_1 + Q_1\sqrt{-1};$$

de sorte qu'il s'agira de trouver les points-racines de $\varphi(z)=0$ sur un arc déterminé de la courbe $Q_1=0$.

Or, si l'extrémité de la variable z parcourt un arc de la courbe $Q_1=0$, nous savons que la fonction $\varphi(z)$ est représentée par une longueur constamment couchée sur l'axe des x; que l'extrémité de cette longueur peut osciller sur cet axe pendant que l'extrémité de la variable progresse sur la courbe Q_1 dans un sens déterminé et continu; enfin, que l'extrémité de la fonction vient coïncider avec l'origine chaque fois que la variable traverse un point-racine.

D'après cela, il est aisé de voir que quand la variable s'avance de l'un des points-racines vers un autre, la fonction a un signe déterminé, positif ou négatif, lequel demeure le même tant que la variable reste dans l'intervalle qui sépare ces deux points. Et encore il est manifeste que, quand la variable approche de traverser un point-racine, la fonction tend vers zéro, et au contraire s'en éloigne après ce passage. D'où il résulte que, si on suppose les coordonnées x et y, et par suite la variable z, exprimées en fonction de l'arc s de la courbe Q_1, et les accroissements de cet arc comptés positivement dans le sens du mouvement de la variable sur cette courbe, il résulte, dis-je, de tout ce qui précède que la fonction $\varphi(z)$ et sa dérivée $\varphi'(z)\frac{dz}{ds}$ seront de signes contraires avant le passage et de même signe après.

Dans ce résultat qui convient aux racines quelconques, on reconnaît une propriété bien connue des racines réelles. Quoi qu'il en soit, il est manifeste que le nombre des points-racines contenus sur un arc donné de la courbe Q_1 sera égal au nombre de variations ascendantes que le quotient

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)\frac{dz}{ds}}$$

éprouve lorsque la variable parcourt cet arc; et à cette occasion on remarquera que, pendant tout ce parcours, il n'y a que de telles variations; il n'y en a pas qui soient *descendantes* : c'est ce que nous avions annoncé précédemment.

Observons maintenant que, dans la circonstance actuelle, comme Q_1 est nul, on a $\varphi(z) = P_1$; de sorte que, par un calcul déjà effectué précédemment, on trouvera que le quotient ci-dessus équivaut à

$$\frac{P_1 \frac{dx}{ds}}{\frac{dP_1}{dx}};$$

et par conséquent aussi à

$$\frac{(bP - aQ)\frac{dx}{ds}}{b\frac{dP}{dx} - a\frac{dQ}{dx}}.$$

On peut simplifier cette expression en remplaçant Q par $-\frac{a}{b}P$, et $\frac{dQ}{dx}$ par $-\frac{dP}{dy}$, ce qui, en supprimant le facteur constant $\frac{a^2+b^2}{b}$, l'amène à la forme défini-

tive

$$\frac{P \frac{dx}{ds}}{b \frac{dP}{dx} + a \frac{dP}{dy}}.$$

Et enfin on peut supposer le périmètre de la courbe $aP + bQ = 0$ partagé en une suite d'arcs pour lesquels le facteur $\frac{dx}{ds}$ soit constamment positif, sauf à parcourir chacun d'eux dans un sens convenable. Et alors on obtiendra finalement la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si l'extrémité de la variable z décrit un chemin continu le long duquel le rapport $\frac{P}{Q}$ soit constant et égal à $-\frac{a}{b}$, le nombre des points-racines de l'équation* $F(z) = 0$ *rencontrés sur ce chemin sera égal au nombre des variations éprouvées par la fonction* $\frac{P}{b \frac{dP}{dx} + a \frac{dP}{dy}}$.

VIII.

A l'aide du théorème de Sturm, on peut toujours trouver le nombre des variations de cette fonction et par conséquent séparer toutes les racines lorsque x et y, qui sont déjà liées par la relation $aP + bQ = 0$, peuvent être exprimées en fonction rationnelle d'une nouvelle variable (*).

(*) Nous avons supposé dans tout ceci que l'équation proposée était à coefficients quelconques, c'est-à-dire de la forme $a + b\sqrt{-1}$, et la règle énoncée dans le texte se rapporte à la séparation des racines d'une telle équation quelle que soit leur nature. Mais pour l'application, il convient

Mais, si ces résultats ne peuvent pas être obtenus dans tous les cas, il n'est pas moins remarquable que, grâce à la représentation (*réalisation*) des quantités imaginaires par des longueurs inclinées, il soit si facile d'exprimer le principe de la *séparation des racines* sous une forme générale, c'est-à-dire indépendamment de leur nature.

De plus, il est deux autres principes de la théorie des équations qu'ordinairement on ne considère que par rapport aux racines réelles et qui, par l'emploi des mêmes considérations, s'étendent sans difficulté aux racines imaginaires; voici ce qu'il en est :

Supposé toujours que l'extrémité de la variable z passe d'un point à un autre du plan des xy par un chemin continu le long duquel le rapport $\frac{P}{Q}$ conserve une valeur constante, et qu'on appelle z_1 et z_2 les valeurs de la variable aux extrémités de ce chemin;

THÉORÈME II. — *Si* $F(z_1)$ *et* $F(z_2)$ *sont de signes contraires, le chemin parcouru contient au moins un point-racine de l'équation* $F(z) = 0$, *et il peut en contenir un nombre impair quelconque; si au contraire* $F(z_1)$ *et* $F(z_2)$ *sont de mêmes signes, le chemin parcouru ne contient aucun point-racine ou bien il en contient un nombre pair.*

---

d'observer que si le premier membre d'une telle équation admet des facteurs réels tant du premier que du second degré, on pourra toujours le décomposer en un produit de deux polynômes entiers dont l'un sera le produit de ces facteurs réels. En d'autres termes, une équation à coefficients de la forme $a + b\sqrt{-1}$ pourra toujours être supposée ne contenir ni racines réelles, ni racines imaginaires conjuguées. On peut même admettre qu'elle a été débarrassée préalablement de toute racine imaginaire de la forme simple $\beta\sqrt{-1}$. AB. TR.

THÉORÈME III. — *Si z_1 et z_2 sont eux-mêmes, sur le chemin parcouru, deux points-racines consécutifs, il y a dans l'intervalle au moins un point-racine et généralement un nombre impair de points-racines de l'équation* $F'(z) = 0$.

Le théorème II n'est que le *principe des substitutions* entendu ici d'une manière générale. Le théorème III, que M. Liouville a depuis longtemps démontré dans son journal à l'aide du calcul, est une extension du *principe de Rolle.*

Ces deux théorèmes reçoivent une évidence intuitive des considérations par lesquelles j'ai établi ci-dessus le théorème I, qu'on peut appeler le *principe de la séparation des racines.* De plus je montrerai, dans un prochain article, que le théorème de Cauchy sur les *contours fermés,* et aussi la propriété fondamentale de toute équation d'*avoir au moins une racine,* deviennent, à l'aide des mêmes considérations, des vérités d'intuition.

Le rapprochement de ces résultats amène quelques réflexions sur lesquelles je m'arrêterai un instant.

IX.

MM. Briot et Bouquet, dans la Préface de leur *Théorie des fonctions doublement périodiques,* s'expriment de la manière suivante : « Il convient, disent-ils, de faire disparaître l'espèce d'antagonisme ou d'opposition que l'on a laissé subsister jusqu'à présent entre ce qu'on a appelé les quantités *réelles* et les quantités *imaginaires.* » Et, à ce propos, ils exposent, mais sans en faire l'historique, la conception à laquelle Mourey a donné une forme définitive : « Si dans un plan on prend un point fixe, que par ce point on mène un axe fixe, rien n'empêche de concevoir la quantité imaginaire comme une

longueur portée à partir de l'origine dans une direction marquée par l'argument; la variation de cette grandeur *géométrique,* comme l'appelle Cauchy, sera figurée par le mouvement d'un point dans le plan. La variable réelle correspond au mouvement particulier du point mobile sur l'axe dans un sens ou dans l'autre. Cette extension donnée à l'idée de grandeur résout bien des difficultés qui se sont présentées dans la théorie des fonctions, et dont il était impossible de se rendre compte tant qu'on laissait la variable réelle, c'est-à-dire tant qu'on assujettissait le point mobile à se mouvoir sur l'axe. » (*Théorie,* Préf., p. XVIII.)

Ces deux auteurs se bornent à signaler l'heureuse influence de l'idée nouvelle sur la *théorie des fonctions,* qui est en effet leur objet spécial; mais n'y avait-il pas lieu de présumer que cette même extension de l'idée de grandeur pourrait éclairer aussi quelques difficultés propres à l'*algèbre élémentaire,* quelques difficultés auxquelles nous ne pensons plus, précisément peut-être parce que, sous peine de ne pas avancer, nous avons dû les franchir sans pouvoir nous en rendre compte; comme celle-ci, par exemple, qui s'est présentée à nous dès le début de nos études, que : pour la résolution générale de l'équation du second degré, il est requis l'existence (réputée impossible) de nombres à carrés négatifs! Et si tous les géomètres tombaient d'accord avec MM. Briot et Bouquet que *ce qui fait la variable être réelle, c'est qu'on assujettit son extrémité mobile à se mouvoir sur l'axe,* n'est-il pas manifeste qu'il n'y aurait plus d'autre distinction à faire entre les racines d'une même équation, si ce n'est que les unes étant représentées par des longueurs couchées sur l'axe, les autres le seraient par des longueurs inclinées; de sorte qu'il n'y aurait plus lieu de maintenir la dénomination d'*imaginaires* qu'on attribue à celles-ci,

par opposition au nom de *réelles*, exclusivement donné aux premières, comme s'il s'agissait d'opposer LE NÉANT à L'ÊTRE!

Il est vrai que pour choisir avec sécurité entre plusieurs représentations dont chacune peut avoir quelque utilité propre, et notamment pour pouvoir affirmer que la théorie de Mourey sur les quantités dites imaginaires peut seule, et à l'exclusion de toute autre, éclaircir les difficultés de la théorie des fonctions et celles de l'algèbre élémentaire, il faut, chose d'ailleurs facile, s'être assuré préalablement que la grandeur géométrique, ayant pour mesure de sa longueur le *module* et pour mesure de sa direction l'*argument*, est bien la seule qui offre dans ses propriétés métriques et descriptives la RÉALISATION de toutes les propriétés analytiques du symbole $a + b\sqrt{-1}$ ou de son équivalent $\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ (*).

X.

Les trois résultats dont nous avons établi l'universalité pour les racines quelconques de toute équation à une

---

(*) C'est ce que j'établirai dans les articles ~~qui~~ suivront celui-ci; mais dans l'intérêt de toute une catégorie de lecteurs à laquelle s'adressent les *Nouvelles Annales*, je dois constater ici que la théorie indiquée dans ce paragraphe ne jouit pas, il s'en faut beaucoup, de l'assentiment unanime des géomètres. On doit considérer cette théorie comme n'étant pas encore sortie du domaine de la controverse. C'est pourquoi il doit être entendu que tout candidat aux Écoles de l'Etat pourra, sans crainte d'aucune disgrâce, continuer d'appuyer la théorie des imaginaires comme aussi la règle des signes, soit sur ce que « l'algèbre peut combiner des symboles dénués de toute signification, sous la seule condition de les combiner de manière à n'en déduire que des résultats dont la vérité est connue d'avance; » soit sur ce que « l'algèbre serait essentiellement l'art de combiner des signes et des formules littérales sans se préoccuper de leur signification concrète, possible ou impossible; » car tels sont les principes qui aujourd'hui ont cours dans l'enseignement. AB. TR.

seule inconnue, savoir : le *principe des substitutions*, le *principe de Rolle* et le *principe de la séparation des racines*, subsistent encore par rapport aux solutions réelles d'un système de deux équations à deux inconnues et à coefficients réels, soient

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 0.$$

J'énoncerai ces trois principes sous leur forme analytique ; mais, pour en reconnaître intuitivement la vérité, on pourra s'aider de la géométrie, en considérant d'une part la courbe qui correspondrait sur le plan des x, y à l'une des deux équations données, par exemple à $\varphi(x, y) = 0$; et d'autre part la surface ayant pour ordonnée verticale l'autre fonction, c'est-à-dire la surface qui correspondrait à l'équation $z = \psi(x, y)$.

D'ailleurs j'appellerai *systèmes relatifs à* $\varphi(x, y)$, ou plus simplement *systèmes de* $\varphi(x, y)$, les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont à l'équation $\varphi(x, y) = 0$; et j'appellerai *solutions* les systèmes de valeurs de x et y qui satisfont à la fois aux deux équations données $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Cela posé, on a les énoncés suivants :

I. *Principe des substitutions*. — Je suppose que par une suite de systèmes continus relatifs à $\varphi(x, y)$ on puisse passer du système (x_1, y_1) au système (x_2, y_2) et qu'on substitue ces deux systèmes extrêmes dans $\psi(x, y)$: 1° si les deux résultats $\psi(x_1, y_1)$ et $\psi(x_2, y_2)$ sont de signe contraire, il y aura parmi les systèmes intermédiaires une solution au moins, ou bien plusieurs solutions en nombre impair ; 2° si les deux résultats ψ_1 et ψ_2 sont de même signe, etc.

II. *Principe de Rolle*. — Si les systèmes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux *solutions consécutives*, il y aura parmi les systèmes intermédiaires de $\varphi(x, y)$ l'un d'eux au

moins, ou plus généralement un nombre impair d'entre eux, qui rendront la fonction $\psi(x, y)$ un maximum ou un minimum, c'est-à-dire qui annuleront la fonction

$$\frac{\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}.$$

III. *Principe de la séparation des solutions.* — Tous les systèmes de $\varphi(x, y)$ intermédiaires à deux solutions consécutives donneront manifestement à $\psi(x, y)$ un signe invariable, positif ou négatif. Si on imagine ces systèmes intermédiaires substitués dans $\psi(x, y)$ selon leur ordre progressif, il est évident que le résultat s'éloignera de zéro pour des systèmes infiniment voisins d'une solution et s'éloignant de cette solution; au contraire, le résultat tendra vers zéro pour des systèmes s'approchant indéfiniment d'une solution. D'après cela, si on suppose x et y exprimés en fonction de l'arc de la courbe $\varphi(x, y) = 0$, de sorte que $\psi(x, y)$ soit à son tour une fonction de cet arc, fonction que je représenterai par $\psi(s)$, on verra que le nombre de solutions comprises entre deux systèmes de $\varphi(x, y)$ est égal au nombre des variations ascendantes qu'éprouve la fonction $\frac{\psi(s)}{\psi'(s)}$ lorsqu'on donne à s toutes les valeurs intermédiaires à celles qui correspondent aux systèmes extrêmes. On voit de plus que si la fonction $\psi(s)$ est rationnelle, on pourra, à l'aide du théorème de Sturm, *séparer* les solutions communes aux deux équations données.

NOTE SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER;

PAR M. E. LIONNET.

1. THÉORÈME. — *Les diviseurs du produit ab de deux nombres premiers entre eux sont les produits obtenus en multipliant tous les diviseurs de a par chacun des diviseurs de b.*

Il suffit de démontrer : 1° que tous ces produits sont inégaux; 2° que chacun d'eux est un diviseur de ab; 3° que tout diviseur de ab est égal à l'un de ces mêmes produits.

1° Car si deux produits $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, dans lesquels α, α' sont diviseurs de a, et β, β' diviseurs de b, étaient égaux entre eux, α divisant $\alpha\beta$ diviserait aussi $\alpha'\beta'$; or, a étant premier à b, α diviseur de a est premier à β' diviseur de b; donc α diviserait α' : on prouverait de même que α' diviserait α; de sorte qu'on aurait $\alpha = \alpha'$, et, par suite, $\beta = \beta'$, ce qui est impossible, car, d'après la manière dont s'effectuent les multiplications, il n'y a pas de produits qui aient à la fois même multiplicande et même multiplicateur; donc $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont inégaux.

2° La relation

$$\frac{ab}{\alpha\beta} = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta}$$

montre que, si α est diviseur de a et β diviseur de b, le quotient de ab par $\alpha\beta$ sera un nombre entier; donc $\alpha\beta$ est diviseur de ab.

3° Réciproquement, tout nombre d diviseur de ab est le produit d'un diviseur de a par un diviseur de b. Car si δ désigne le plus grand commun diviseur de a et d,

a' et d' les quotients premiers entre eux de a et d par δ, on aura $a = \delta a'$, $d = \delta d'$, et, par suite,

$$\frac{ab}{d} = \frac{\delta a' b}{\delta d'} = \frac{a' b}{d'};$$

or le quotient de ab par d est un nombre entier, donc d' est diviseur de $a'b$, et, par suite, diviseur de b; donc enfin d, égal à $\delta d'$, est le produit d'un diviseur de a par un diviseur de b.

Corollaire I. — Soit m le nombre des diviseurs de a, et n celui des diviseurs de b. En multipliant les m diviseurs de a par chacun des n diviseurs de b, on obtient mn produits qui sont, d'après ce qui précède, tous les diviseurs de ab; donc *le nombre des diviseurs de ab est égal au produit du nombre des diviseurs de a par celui des diviseurs de b.*

Corollaire II. — Le produit de deux sommes étant égal à la somme des produits de toutes les parties de la première par chacune des parties de la seconde, le produit de la somme des m diviseurs de a par celle des n diviseurs de b est égal à la somme des mn produits obtenus en multipliant tous les diviseurs de a par chacun des diviseurs de b, c'est-à-dire à la somme de tous les diviseurs de ab; donc *la somme des diviseurs du produit ab est égale à la somme des diviseurs de a multipliée par celle des diviseurs de b.*

Corollaire III. — m désignant un nombre entier quelconque, si l'on multiplie la $m^{ième}$ puissance α^m d'un diviseur de a par la $m^{ième}$ puissance β^m d'un diviseur de b, le produit $(\alpha\beta)^m$ sera la $m^{ième}$ puissance du diviseur $\alpha\beta$ de ab; donc *la somme des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs de ab est égale à la somme des $m^{ièmes}$ puissances des di-*

viseurs de a multipliée par celle des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs de b.

2. Théorème. — *Lorsque plusieurs nombres a, b, c,..., k, l sont premiers entre eux deux à deux,* 1° *si l'on multiplie tous les diviseurs de a par chacun des diviseurs de b, puis tous les produits ainsi obtenus par chacun des diviseurs de c, etc., jusqu'à ce qu'on ait multiplié par chacun des diviseurs de l, ces derniers produits seront tous les diviseurs du produit abc...kl;* 2° *le nombre des diviseurs du produit abc...kl est égal au produit qui a pour facteurs le nombre des diviseurs de a, celui des diviseurs de b, etc., jusqu'au nombre des diviseurs de l;* 3° *la somme des diviseurs du produit abc...kl est égale au produit qui a pour facteurs la somme des diviseurs de a, celle des diviseurs de b, etc., jusqu'à la somme des diviseurs de l;* 4° *la somme des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs du produit abc...kl est égale au produit qui a pour facteurs la somme des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs de a, celle des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs de b, etc., jusqu'à la somme des $m^{ièmes}$ puissances des diviseurs de l.*

En effet, le produit *abc* de trois facteurs premiers entre eux deux à deux, pouvant être considéré comme un produit $ab \times c$ de deux facteurs premiers entre eux, on en déduit que le théorème précédent et ses corollaires, démontrés pour un produit de deux facteurs, se trouvent établis pour un produit de trois facteurs, puis, pareillement, pour un produit *abcd* ou $abc \times d$ de quatre facteurs, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs.

Remarque. — En désignant par $\Sigma(N)$ la somme des puissances, d'un même degré $m =$ ou $>$ 0, de tous les diviseurs d'un nombre entier quelconque N, les trois dernières parties de l'énoncé du théorème précédent se trou-

veront exprimées par la seule formule

$$\Sigma_m(abc\ldots kl) = \Sigma_m(a)\,\Sigma_m(b)\,\Sigma_m(c)\ldots\Sigma_m(l)$$

analogue à la suivante, que l'on doit à Gauss,

$$\varphi(abc\ldots kl) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\ldots\varphi(l),$$

dans laquelle $\varphi(\mathrm{N})$ indique, d'après la notation d'Euler, le nombre des entiers inférieurs et premiers à N.

3. Problème. — *Étant donné un nombre entier* $\mathrm{N} > 1$, *trouver tous ses diviseurs, leur nombre* n, *leur somme* $\Sigma_1(\mathrm{N})$ *et la somme* $\Sigma_m(\mathrm{N})$ *de leurs* $m^{\text{ièmes}}$ *puissances.*

Lorsque N est une puissance a^α d'un nombre premier, les diviseurs de N et leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$ sont les termes des progressions géométriques

$$1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\ldots,\quad a^\alpha,$$
$$1,\quad a^m,\quad a^{2m},\quad a^{3m},\ldots,\quad a^{m\alpha};$$

et, par suite,

$$n = \alpha + 1,\quad \Sigma_1 = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},\quad \Sigma_m = \frac{a^{m(\alpha+1)} - 1}{a^m - 1}.$$

Dans le cas plus général où N est un produit

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$$

de plusieurs puissances de nombres premiers $a, b, c,\ldots, l$ inégaux et supérieurs à l'unité, ces puissances étant premières entre elles deux à deux, on trouvera (2) les diviseurs de N en multipliant les diviseurs de a^α par chacun des diviseurs de b^β, puis les produits ainsi obtenus par chacun des diviseurs de c^γ, etc., jusqu'à ce qu'on ait multiplié par chacun des diviseurs de l^λ. On aura

de même (n° 2) les formules

$$n = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots(\lambda + 1),$$

$$\Sigma_1(N) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdots \frac{l^{\lambda+1} - 1}{l - 1},$$

$$\Sigma_m(N) = \frac{a^{m(\alpha+1)} - 1}{a^m - 1} \cdot \frac{b^{m(\beta+1)} - 1}{b^m - 1} \cdots \frac{l^{m(\lambda+1)} - 1}{l^m - 1},$$

dont la dernière se transforme en la précédente pour $m = 1$.

Corollaire I. — Lorsque N est un carré, tous les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des nombres pairs, et, par suite, chacun des facteurs de n est impair; donc leur produit n est aussi un nombre impair. Lorsque N n'est pas un carré, l'un au moins des exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ est impair, et, par suite, l'un au moins des facteurs de n et n lui-même sont des nombres pairs; donc, *suivant qu'un nombre entier est ou n'est pas un carré, le nombre de ses diviseurs est impair ou pair, et réciproquement.*

Corollaire II. — Tout diviseur commun à plusieurs nombres $a, b, c, \ldots,$ divisant leur plus grand commun diviseur D, et réciproquement, tout diviseur de D divisant chacun de ces nombres, il en résulte qu'on obtiendra tous les diviseurs communs à $a, b, c, \ldots,$ leur nombre, leur somme et celle de leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$, en cherchant leur plus grand commun diviseur D, puis tous les diviseurs de D, leur nombre n, leur somme $\Sigma_1(D)$ et la somme $\Sigma_m(D)$ de leurs $m^{\text{ièmes}}$ puissances.

QUELQUES RÉFLEXIONS AU SUJET DE LA LIGNE DE LONGUEUR MINIMUM SUR LA SPHÈRE;

PAR M. HOÜEL,
Professeur à la Faculté de Bordeaux.

« Question bien posée est à moitié résolue, » si l'on en croit le proverbe. On pourrait même dire ici, « est complétement resolue. » D'où peuvent venir, en effet, les nombreuses tentatives que l'on fait pour démontrer la propriété de minimum de longueur dont jouissent sur la sphère les arcs de grands cercles sinon de ce qu'aucun des auteurs n'a commencé par se demander ce que c'est que la *longueur* d'une courbe?

Ici on nous renverra, sans doute, à la notion « intime, indéfinissable, que chacun a de la longueur d'une ligne quelconque. » Or, pour tout géomètre qui a osé s'affranchir des préjugés de la routine, cette prétendue notion *à priori* n'a rien de précis ni de mathématique, et ce n'est, au fond, que l'énoncé tronqué d'un théorème élémentaire de calcul intégral.

Disons à ce propos que personne moins que nous ne méprise l'emploi des notions vulgaires et des représentations matérielles dans l'enseignement des mathématiques. Ces emprunts faits au sens commun sont éminemment propres à guider les jeunes intelligences vers le terrain du raisonnement exact. D'ordinaire ces notions résument grossièrement une synthèse très-compliquée de résultats expérimentaux; mais en même temps, elles nous sont plus familières que les idées simples que nous en dégagerons plus tard par la puissance de l'abstraction.

Mais une fois que par des assimilations avec les objets

réels, on est parvenu à comprendre le but de la science pure, il faut, pour fonder celle-ci, reprendre à nouveau toutes les idées confuses de l'enseignement préparatoire, et par une analyse faite avec soin, séparer celles qui sont vraiment simples et irréductibles, pour y ramener ensuite celles qui sont plus complexes.

Telle est en particulier la voie qu'il faut suivre pour arriver à la notion exacte de la longueur d'une ligne courbe.

Après avoir indiqué ce que c'est qu'une ligne en général, on définit la ligne droite par sa propriété d'être complétement fixée par la position de deux de ses points, propriété dont l'existence nous est révélée par des expérience faites sur des *lignes matérielles*.

Une portion de ligne droite pouvant être appliquée sur une autre, on déduit de là les notions, 1° de l'égalité de deux droites, 2° de la décomposition d'une droite en parties, ou, ce qui revient au même, de l'addition ou de la soustraction de deux droites. De cette dernière notion on tire aisément celle de la multiplication d'une droite par un nombre quelconque, entier ou fractionnaire; puis, en appliquant le *principe des limites*, on arrive à ce que l'on nomme, par abréviation, la multiplication d'une droite par un *nombre incommensurable*.

En joignant à la notion de la ligne droite celle du plan et de l'angle, on établit, par des raisonnements fondés sur des superpositions immédiates, les propriétés élémentaires d'un triangle en commençant par le cas simple isocèle; puis on passe à la comparaison des triangles entre eux, et ensuite on étudie des figures plus compliquées.

Parmi les propriétés du triangle, qui se démontrent de la manière la plus simple, lorsqu'on suit la marche convenable, est celle qui fait l'objet de la vingtième proposition d'Euclide :

Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

Ce qui veut dire que, si l'on porte sur une même droite, à la suite l'une de l'autre, deux droites égales à deux des côtés du triangle, le troisième côté sera égal à une partie seulement de la droite totale (*).

De ce théorème on déduit, comme corollaires, les théorèmes connus d'inégalités entre les droites et les lignes polygonales dans le plan; on les étend ensuite facilement aux lignes polygonales dans l'espace. Il en résulte, entre autres conséquences, que *la ligne droite est le plus court des chemins* FORMÉS DE PARTIES RECTILIGNES *que l'on puisse tracer entre deux points donnés.*

Par une marche analogue, sauf quelques modifications au point de départ, on peut établir les mêmes propositions pour les figures composés d'arcs de grands cercles sur la sphère. Ainsi, *le plus court des chemins* COMPOSÉS D'ARCS DE GRANDS CERCLES *que l'on puisse tracer sur la sphère entre deux points donnés, est l'arc unique de grand cercle qui joint ces deux points.*

Cette analogie tient à ce que les arcs de grands cercles d'une même sphère jouissent comme la droite de la propriété d'être superposables à eux-mêmes dans toutes leurs parties, de sorte que l'on peut en définir l'égalité et l'addition de la même manière que pour la ligne droite. De là aussi résultent un grand nombre de propriétés communes aux triangles sphériques et aux triangles rectilignes.

Ici s'arrêtent les notions auxquelles on peut parvenir sans le secours du *calcul des limites* ou *calcul infinitésimal.* Si l'on prend une ligne courbe quelconque, elle ne

(*) C'est de cette manière qu'il faut *définir* les mots *plus grand* et *plus petit*, qui n'ont par eux-mêmes aucun sens en mathématiques. Le prétendu axiome : « Le tout est plus grand que la partie » n'est autre chose qu'une *définition* de l'inégalité.



sera pas, en général, superposable à elle-même dans toutes ses parties; ou, si elle l'est, comme le cercle ou l'hélice, elle ne sera pas superposable à une courbe analogue, mais de dimensions différentes.

Or, la superposition est le seul mode de comparaison directe des grandeurs géométriques. On ne peut comparer deux grandeurs qu'en les superposant l'une à l'autre, soit en entier, soit par parties. Si donc on peut définir rigoureusement l'égalité et l'addition de longueurs prises sur des droites quelconques, sur des cercles de même rayon, ou sur des hélices de même rayon et de même pas, il est impossible d'en faire autant pour les autres courbes, les mots *égal, plus grand* ou *plus petit* n'ayant plus ici absolument aucun sens.

Mais on reconnaît que, soit dans les applications aux objets matériels, soit dans les recherches théoriques, on peut toujours substituer à une courbe donnée un polygone qui, dans le premier cas, semble à nos yeux se confondre avec la courbe, et qui, dans le second cas, a ses points *infiniment rapprochés* de ceux de la courbe (*).

C'est toujours de ce polygone qu'il est question, toutes les fois que l'on voudra soumettre la courbe à des relations métriques quelconques. En particulier, c'est la longueur du périmètre de ce polygone, ou plutôt la *limite* de cette longueur, que l'on appellera, d'une manière abrégée, la *longueur de la courbe*.

On démontre dans tous les traités complets de calcul infinitésimal, et en particulier dans les ouvrages de M. Duha-

(*) Il est inutile d'avertir les personnes versées dans les mathématiques de ne pas confondre les quantités *très-petites*, c'est-à-dire qui sont sur le point d'échapper à nos sens et auxquelles on peut donner le nom de *microscopiques*, avec les quantités *infiniment petites*, qui sont de grandeur essentiellement variable, et que l'on *peut* faire approcher de zéro autant que l'on voudra.

mel (*), que cette limite de longueur du polygone infiniment voisin de la courbe existe réellement, et quelle est finie et déterminée pour tout arc de courbe fini et déterminé. J'ai indiqué, dans une brochure publiée récemment (**), comment cette démonstration peut être présentée sous une forme élémentaire dans le cas d'une courbe plane, et il est aisé de modifier la démonstration de manière qu'elle s'applique à une courbe quelconque dans l'espace.

Le même mode de raisonnement peut également s'appliquer à l'existence d'un arc de grand cercle égal à la limite du périmètre d'un polygone sphérique infiniment voisin d'une courbe quelconque tracée sur la sphère, et c'est cet arc-limite que l'on appelle, pour abréger, *longueur de la courbe sphérique.*

De la démonstration même qui établit l'existence de cette limite, il résulte que cette limite jouit de toutes les propriétés des polygones qui convergent vers elle, indépendante du nombre et de la grandeur de leurs côtés.

En particulier, la longueur d'un arc de courbe, plane ou non plane, est plns grande que la corde de cet arc. La longueur d'une courbe sphérique quelconque est plus grande que celle de l'arc de grand cercle qui joint ses extrémités.

Il ne serait pas plus difficile de faire voir qu'entre deux points de la sphère, le plus court chemin ne peut être une courbe *extérieure* à la sphère.

Quelque élémentairement que l'on présente la démonstration de ces théorèmes, ce n'en sont pas moins, au fond, des théorèmes de calcul intégral. Si (à tort, selon

---

(*) *In quibus sunt quædam difficilia intellectu, quæ indocti et instabiles depravant, sicut et ceteras scripturas....* (II Petr., III, 16).

(**) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*, p. 78 et suiv.



nous), on trouve ces considérations trop élevées pour les élèves intelligents de nos Lycées, que l'on supprime alors des programmes les questions qui rendent ces considérations indispensables, et qui sont loin d'être d'une absolue nécessité pour les commençants. Que l'on se contente, tout au plus de traiter le cas de la longueur du cercle, qui se trouve simplifié par la supposition que les polygones employés sont réguliers. Cela vaudrait beaucoup mieux que de donner aux jeunes gens des énoncés vides de sens et des démonstrations illusoires.

Nous n'ignorons pas, malheureusement, que les idées que nous venons de rappeler, et qui constituent la *seule* marche logique, trouveront, malgré leur extrême simplicité, bien des difficultés pour se faire jour à travers les brouillards de la tradition, et que longtemps encore on publiera des démonstrations du plus court chemin sur la sphère et du *postulatum* d'Euclide. Il existe bien encore des chercheurs de la quadrature du cercle et du mouvement perpétuel.

QUESTION DE LICENCE — PROBLÈME DE MÉCANIQUE

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 44);

PAR M. J. GRAINDORGE,
Docteur ès Sciences, à Liége.

Trouver dans un plan vertical la courbe sur laquelle doit être assujetti à se mouvoir un point pesant partant d'un point donné, avec une vitesse initiale donnée en grandeur et en direction, pour que la pression du mobile sur cette courbe soit à la composante normale de son poids dans le rapport constant $\frac{k}{1}$.

k est positif ou négatif suivant que la pression et la composante normale du poids sont dirigées dans le même sens ou en sens contraire. On examinera particulièrement les cas suivants :

$$k = 0, \quad k = 1, \quad k = 2, \quad k = 3, \quad k = -1.$$

Solution. — Prenons pour origine la position initiale du point, et pour axe des x la direction de la vitesse initiale.

Si θ est l'angle que fait la tangente à la courbe au point m avec l'axe des y, la composante normale du poids g sera $g \sin\theta$, et la pression sera $N = gk \sin\theta$.

Les équations du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = N\cos\lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g + N\sin\lambda,$$

deviennent, en remarquant que $\cos\lambda = -\cos\theta$ et $\sin\lambda = \sin\theta$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -kg\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g(1 - k\sin^2\theta). \end{aligned} \right.$$

Or, on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \sin\theta \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \cos\theta \frac{ds}{dt},$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sin\theta \frac{d^2s}{dt^2} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \cos\theta \frac{d^2s}{dt^2} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{dt}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (1), il vient

$$\sin\theta \frac{d^2 s}{dt^2} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = - kg \sin\theta \cos\theta,$$

$$\cos\theta \frac{d^2 s}{dt^2} - \sin\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = - g (1 - k \sin^2\theta),$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = - g \cos\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{ds}{dt} = g (1 - k) \sin\theta,$$

ou, en remarquant que $\frac{ds}{dt} = v$,

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = - g \cos\theta, \\ v \frac{d\theta}{dt} = g (1 - k) \sin\theta. \end{cases}$$

Ces deux dernières équations nous donnent par division

$$\frac{dv}{v} = - \frac{\cos\theta \, d\theta}{(1 - k) \sin\theta},$$

et en intégrant, et désignant par v_0 la vitesse initiale, c'est-à-dire la vitesse pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$lv = lv_0 - \frac{1}{(1 - k)} l \sin\theta,$$

d'où

$$(3) \qquad v = v_0 \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

De la seconde des équations (2) on déduit

$$(4) \qquad dt = \frac{v \, d\theta}{(1 - k) g \sin\theta} = \frac{v_0 \, d\theta}{(1 - k) g (\sin\theta)^{\frac{2-k}{1-k}}},$$

et, comme $ds = v\,dt$,

(5) $$ds = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,\frac{d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{3-k}{1-k}}};$$

mais on a aussi

$$dx = ds\sin\theta \quad \text{et} \quad dy = ds\cos\theta,$$

d'où

(6) $$dx = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,\frac{d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{2}{1-k}}},$$

qu'on ramène à une différentielle binôme en posant $\sin\theta = z$

(7) $$dx = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,z^{-\frac{2}{1-k}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz.$$

On a aussi

(8) $$dy = \frac{v_0^2}{(1-k)g}\,\frac{\cos\theta\,d\theta}{(\sin\theta)^{\frac{3-k}{1-k}}} = \frac{v_0^2}{(1-k)g}(\sin\theta)^{-\frac{3-k}{1-k}}\cos\theta\,d\theta,$$

d'où, en intégrant,

$$y = -\frac{v_0^2}{2g}(\sin\theta)^{-\frac{2}{1-k}} + \text{const.}$$

Or, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, et il vient

(9) $$y = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - (\sin\theta)^{-\frac{2}{1-k}}\right].$$

Pour obtenir l'équation différentielle de la courbe, nous prendrons la formule

$$\frac{dx}{dy} = \tang\theta.$$

L'équation (9) nous donnera

$$\sin\theta = \left(\frac{v_0^2}{v_0^2 - 2gy}\right)^{\frac{1-k}{2}} = \frac{v_0^{1-k}}{(v_0^2 - 2gy)^{\frac{1-k}{2}}},$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{v_0^{2(1-k)}}{(v_0^2 - 2gy)^{1-k}}};$$

donc

$$(10) \qquad dx = \frac{v_0^{1-k}\,dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^{1-k} - v_0^{2(1-k)}}}$$

sera l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Cette expression sera intégrable lorsqu'on aura $\frac{1}{1-k}$ = entier ou bien $\frac{1}{1-k} - \frac{1}{2}$ = entier.

La première condition est satisfaite quand on suppose $k = 0$ et $k = 2$, la seconde pour $k = -1$ et $k = 3$.

Examinons maintenant ces cas particuliers.

1° *Soit* $k = 0$. Nous aurons pour la vitesse

$$v = \frac{v_0}{\sin\theta};$$

la longueur de l'arc de courbe sera donnée par la formule (5),

$$ds = \frac{v_0^2}{g}\frac{d\theta}{\sin^3\theta},$$

dont l'intégrale est

$$s = \frac{v_0^2}{2g}\left(l\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right).$$

La formule (10) donne pour l'équation de la courbe

$$dx = \frac{v_0\,dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy) - v_0^2}} = \frac{v_0\,dy}{\sqrt{-2gy}},$$

et en intégrant, et remarquant que $x = 0$ pour $y = 0$, il vient

$$x^2 = -\frac{2v_0^2}{g}y,$$

équation d'une parabole dont l'axe est l'axe des abscisses.

2° *Soit* $k = 1$. — Ce cas ne peut pas se déduire des formules générales trouvées précédemment. Nous devons reprendre les formules primitives (2) et y faire $k = 1$; il viendra alors

$$\frac{dv}{dt} = -g\cos\theta,$$

$$v\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

La dernière nous apprend que $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ou $\theta = \text{const.}$

En intégrant la première, nous trouvons

$$v = v_0 - gt\cos\theta.$$

De $ds = v\,dt$, on déduit

$$ds = (v_0 - gt\cos\theta)\,dt,$$

d'où

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}\cos\theta.$$

Enfin,

$$\frac{dx}{dy} = \tang\theta,$$

d'où

$$x = y\tang\theta,$$

puisque $\theta = \text{const.}$

Donc, dans ce cas, la courbe devient une ligne droite, et le mouvement est uniformément varié.

3° *Soit* $k = 2$. — La formule (3) donne, pour la vitesse au point m de la courbe,

$$v = v_0 \sin\theta.$$

La formule (4) donne

$$dt = -\frac{v_0\, d\theta}{g}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{v_0}{g}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Nous aurons aussi

$$ds = -\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\, d\theta, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta.$$

Enfin, la formule (10) donne l'équation de la courbe

$$dx = \frac{v_0^{-1}\, dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^{-1} - v_0^{-2}}} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gy}\, dy}{\sqrt{2gy}},$$

$$dx = \frac{(v_0^2 - 2gy)\, dy}{\sqrt{2gy\,(v_0^2 - 2gy)}}.$$

C'est l'équation différentielle de la cycloïde.

En posant

$$v_0^2 - 2gy = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{z\, dz}{2g\sqrt{z\,(v_0^2 - z)}},$$

d'où, en intégrant,

$$x = \frac{1}{2g}\sqrt{2gy\,(v_0^2 - 2gy)} - \frac{v_0^2}{4g}\arccos\frac{4gy - v_0^2}{v_0^2}.$$

4° *Soit* $k = 3$. — Nous aurons alors, à cause de la formule (3),

$$v = v_0\sqrt{\sin\theta};$$

à cause de la formule (5),

$$ds = -\frac{v_0^2}{2g}\, d\theta, \quad \text{d'où} \quad s = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

La formule (10) donnera

$$dx = \frac{(v_0^2 - 2gy)\,dy}{\sqrt{v_0^4 - (v_0^2 - 2gy)^2}},$$

d'où, en intégrant, il vient

$$x = \frac{1}{2g}\sqrt{v_0^4 - (v_0^2 - 2gy)^2},$$

enfin

$$x^2 + \left(y - \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}.$$

Donc, dans ce cas, la courbe est un cercle de rayon $\frac{v_0^2}{2g}$.

5° *Soit* $k = -1$. — La vitesse est, dans ce cas,

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\sin\theta}};$$

l'arc de la courbe sera donné par

$$ds = \frac{v_0^2}{2g}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}, \quad \text{d'où} \quad s = -\frac{v_0^2}{2g}\cot\theta;$$

enfin, la formule (10) donne pour la courbe

$$dx = \frac{v_0^2\,dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^2 - v_0^4}}.$$

C'est l'équation différentielle de la chaînette.

En posant

$$v_0^2 - 2gy = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g}\frac{dz}{\sqrt{z^2 - v_0^4}},$$

et, en intégrant cette expression, il vient

$$z = \frac{v_0^2}{2}\left(e^{\frac{2gx}{v_0^2}} + e^{-\frac{2gx}{v_0^2}}\right);$$

donc l'équation de la courbe sera

$$v_0^2 - 2gy = \frac{v_0^2}{2}\left(e^{\frac{2gx}{v_0^2}} + e^{-\frac{2gx}{v_0^2}}\right).$$

Les deux cas $k = -2$ et $k = -3$ se ramènent simplement aux fonctions elliptiques de première espèce.

1° *Soit* $k = -2$. — La vitesse sera donnée par la formule (3),

$$v = \frac{v_0}{\sqrt[3]{\sin\theta}};$$

la longueur de l'arc de la courbe sera, formule (5),

$$ds = \frac{v_0^2\, d\theta}{3g \sin\theta \sqrt[3]{\sin^2\theta}};$$

l'ordonnée y d'un point quelconque en fonction de l'angle θ est

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - (\sin\theta)^{\frac{2}{3}}\right];$$

enfin, l'équation de la courbe est, en vertu de l'équation (10),

$$dx = \frac{v_0^3\, dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^3 - v_0^6}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right)^3 - 1}}.$$

Or, en posant dans cette dernière

$$\left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right) = z,$$

il vient

$$dx = \frac{-v_0^2}{2g}\frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}} = \frac{-v_0^2}{2g}\frac{dz}{\sqrt{(z-1)(z^2+z+1)}}.$$

Si maintenant on fait comme Legendre (*Mémoires de*

l'Académie, 1786),

$$2z + 1 + 2\sqrt{z^2 + z + 1} = q,$$

on trouve

$$dx = \frac{-v_0^2}{g} \frac{dq}{\sqrt{q}\sqrt{q^2 - 6q - 3}} = \frac{-v_0^2}{g} \frac{dq}{\sqrt{q}\sqrt{(q-\alpha)(q+\beta)}},$$

en désignant par α et $-\beta$ les racines de l'équation $q^2 - 6q - 3 = 0$,

$$\alpha = 2\sqrt{3} + 3 \quad \text{et} \quad \beta = 2\sqrt{3} - 3.$$

Si l'on fait dans cette dernière équation

$$q = \frac{\alpha}{\cos^2\varphi},$$

on trouve

$$dx = \frac{-v_0^2}{g\sqrt[4]{3}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}},$$

en posant

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

On voit donc que $k = -2$ donne une fonction elliptique de première espèce.

2° *Soit* $k = -3$. — Nous aurons successivement pour la vitesse x, la longueur de l'arc et l'ordonnée en fonction de θ,

$$v = \frac{v_0}{\sqrt[3]{\sin\theta}},$$

$$ds = \frac{v_0^2\, d\theta}{4g\sin\theta\sqrt[3]{\sin\theta}},$$

$$y - \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{\sin\theta}}\right),$$

enfin, pour l'équation de la courbe,

$$dx = \frac{v_0^4\, dy}{\sqrt{(v_0^2 - 2gy)^4 - v_0^8}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{2gy}{v_0^2}\right)^4 - 1}}.$$

Or, en posant

$$1 - \frac{2gy}{v_0^2} = z,$$

il vient

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g}\frac{dz}{\sqrt{z^4 - 1}} = -\frac{v_0^2}{2g}\frac{dz}{\sqrt{(z^2+1)(z^2-1)}}.$$

et si l'on fait

$$z = -\frac{1}{\cos\varphi},$$

on aura

$$dx = -\frac{v_0^2}{2g\sqrt{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

formule qui nous ramène encore aux fonctions elliptiques de première espèce.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 769 *et* 770

(voir 2e série, t. V, p. 383);

PAR M. LAISANT,
Capitaine du Génie.

769. *Nommons secteur en général le corps terminé d'une part par une surface conique, de l'autre par une surface quelconque, que nous appellerons la* base du

secteur. *Tous les secteurs ayant une base commune et des volumes égaux ont leurs sommets situés dans un même plan.* (ZEUTHEN.)

770. *Le plan dont il est parlé dans la question précédente est perpendiculaire à deux plans sur lesquels l'aire de la projection du périmètre de la base commune est nulle.* (Louis OPPERMANN, de Copenhague.)

Soient :

S le sommet du secteur;

σ la surface de la base;

O, x, y, z un système d'axes rectangulaires auquel je la suppose rapportée;

x, y, z les coordonnées du point S;

σ_x, σ_y, σ_z les projections de la surface σ sur les plans des yz, des xz et des yz.

Je prends sur la surface de base un point M, et j'imagine autour de ce point un élément plan de la surface.

Soit MT le plan tangent en M, et α, β, γ ses angles avec les axes. J'appelle $d\sigma$ l'élément pris autour de M, et $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ ses projections sur les trois plans coordonnés. On aura

$$\frac{d\sigma_x}{d\sigma} = \cos\alpha, \quad \frac{d\sigma_y}{d\sigma} = \cos\beta, \quad \frac{d\sigma_z}{d\sigma} = \cos\gamma.$$

Si je considère l'élément de volume du secteur dv, qui a pour sommet S et pour base $d\sigma$, j'aurai

$$dv = \frac{1}{3} d\sigma \times \text{SD},$$

car ce volume élémentaire peut être assimilé à un cône oblique, dont la hauteur est la distance SD du sommet au plan tangent MT.

Or, en appelant x, y, z les coordonnées du point M,

on sait qu'on a

$$\begin{aligned}SD &= (X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma \\ &= (X - x)\frac{d\sigma_x}{d\sigma} + (Y - y)\frac{d\sigma_y}{d\sigma} + (Z - z)\frac{d\sigma_z}{d\sigma}.\end{aligned}$$

Remplaçant

$$dv = \frac{1}{3}[(X - x)\,d\sigma_x + (Y - y)\,d\sigma_y + (Z - z)\,d\sigma_z],$$

$$3\,dv = X\,d\sigma_x + Y\,d\sigma_y + Z\,d\sigma_z - x\,d\sigma_x - y\,d\sigma_y - z\,d\sigma_z.$$

Remarquons que les valeurs $x d\sigma_x$, $y d\sigma_y$, $z d\sigma_z$ représentent les volumes élémentaires des cylindres projetant l'élément $d\sigma$ sur les trois plans coordonnés.

Si nous imaginons l'intégration faite dans les limites de la surface σ, les trois derniers termes donneront donc V_x, V_y, V_z, en appelant ainsi les volumes compris entre la surface σ, un des plans coordonnés, et le cylindre projetant correspondant.

Il viendra donc pour expression du triple du volume du secteur

$$3V = X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z - V_x - V_y - V_z.$$

En supposant V constant, le lieu du point S sera représenté par cette équation. On voit que ce sera un plan dont les angles avec les plans coordonnés auront des cosinus proportionnels à σ_x, σ_y, σ_z.

Si on change d'axes en prenant pour plan des xy un plan parallèle à celui que nous venons de trouver, l'équation devra prendre la forme $z =$ const., quelles que soient les directions dans le plan xy des axes des x et des y. On aura donc

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0.$$

D'où cette conclusion, plus générale que celle énoncée dans la question 770 :

La projection de la surface de base sur un plan *quelconque* perpendiculaire au plan des sommets est nulle.

Tous les plans ainsi obtenus en faisant varier le vo-

lume V du secteur sont parallèles entre eux, car σ_x, σ_y, σ_z sont constants.

Il y aurait lieu sans doute de rechercher des propriétés assez intéressantes de ces plans par rapport à la surface. On pourrait étudier en particulier le plan pour lequel les volumes V sont nuls. Pour l'instant, je me borne là, n'ayant voulu que résoudre les deux questions proposées.

(*) *Note.* — Ont résolu la même question MM. G.-B. Maffiotti, Pellet, Dennery.

Question 824

(voir 2e série, t. VI, p. 432);

PAR M. G.-B. MAFFIOTTI,
Étudiant à l'université de Turin.

Étant donnée l'équation générale d'une surface du second ordre

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f(x, y, z, 1) \\ & \quad = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx \\ & \qquad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}\right.$$

rapportée à des axes rectangulaires, si l'on coupe cette surface par un plan

$$(2)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

α, β, γ *étant les cosinus de l'axe du plan avec les axes de coordonnées, les valeurs algébriques* R_1, R_2 *des* axes de la section, *seront données par les deux équations*

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{\dfrac{dH}{dD}}{H}\,[A\alpha^2 + A\beta^2 + A\gamma^2 + 2B\beta\gamma \\ & \qquad\qquad + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta - A - A' - A''], \\ & \frac{1}{R_1^2}\,\frac{1}{R_2^2} = -\frac{\left(\dfrac{dH}{dD}\right)^3}{H^2}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations H *désigne le déterminant*

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \alpha \\ B'' & A' & B & C' & \beta \\ B' & B & A'' & C'' & \gamma \\ C & C' & C'' & D & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix}.$$

(PAINVIN.)

Posons

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

et soient a, b, c les coordonnées du centre de la section, R la longueur d'un rayon vecteur, qui partant du centre aboutit à un point quelconque (x, y, z) du périmètre de la section, et l, m, n les cosinus directeurs de ce rayon. On a les équations

$$x = a + Rl,$$
$$y = b + Rm,$$
$$z = c + Rn,$$

(4) $f(a + Rl, b + Rm, c + Rn, 1) = 0, \quad l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0.$

Développons l'avant-dernière; il vient

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(a, b, c, 1) + [lf'(a) + mf'(b) + nf'(c)]R \\ & \qquad\qquad + \varphi(l, m, n) R^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les racines de cette équation doivent être égales et de signes contraires; ce qui donne

$$(6) \qquad lf'(a) + mf'(b) + nf'(c) = 0,$$

on a aussi

$$(7) \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

d'où, $2e$ étant un facteur indéterminé,

$$\left(\frac{1}{2}f'(a) + \alpha e\right) l + \left(\frac{1}{2}f'(b) + \beta e\right) m + \left(\frac{1}{2}f'(c) + \gamma e\right) n = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée par une infinité de valeurs de l, m, n; donc

(8)
$$\begin{cases} \frac{1}{2} f'(a) + \alpha e = 0, \\ \frac{1}{2} f'(b) + \beta e = 0, \\ \frac{1}{2} f'(c) + \gamma e = 0. \end{cases}$$

Ces relations et la suivante

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \delta = 0$$

déterminent complétement les coordonnées a, b, c du centre.

La recherche des axes, envisagée comme une question de maximum et de minimum, se fait en égalant à zéro la différentielle totale de R^2, ou bien, encore, de $\frac{1}{R^2}$ considéré comme fonction des variables l, m, n liées entre elles par les équations (4) et (7). On tire de (5), ayant égard à (6),

(9)
$$\frac{f(a, b, c, 1)}{R^2} = -\varphi(l, m, n),$$

donc

$$\frac{1}{2}\varphi'(l)\,dl + \frac{1}{2}\varphi'(m)\,dm + \frac{1}{2}\varphi'(n)\,dn = 0,$$
$$l\,dl + m\,dm + n\,dn = 0,$$
$$\alpha\,dl + \beta\,dm + \gamma\,dn = 0.$$

La méthode des multiplicateurs donne, $-\lambda$, μ étant deux indéterminées,

(10)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\varphi'(l) - \lambda l + \mu\alpha = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'(m) - \lambda m + \mu\beta = 0, \\ \frac{1}{2}\varphi'(n) - \lambda n + \mu\gamma = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda)\,l+B''m+B'n+\alpha\mu=0,\\
&B''l+(A'-\lambda)m+Bn+\beta\mu=0,\\
&B'l+Bm+(A''-\lambda)\,n+\gamma\mu=0,\\
&\alpha l+\beta m+\gamma n=0,
\end{aligned}$$

dont on déduit par l'élimination de l, m, n, μ

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A'-\lambda & B & \beta \\ B' & B & A''-\lambda & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, développant,

$$\lambda^2-[\varphi(\alpha,\beta,\gamma)-A-A'-A'']\lambda-\frac{dH}{dD}=0,$$

H ayant la signification donnée par l'énoncé de la question.

Maintenant, ajoutons les équations (10) multipliées respectivement par l, m, n. En tenant compte de (4), (7), (9) et d'une propriété connue des fonctions homogènes, on aura

$$\lambda=-\frac{f(a,b,c,1)}{R^2}.$$

Par suite, l'équation en λ se transforme dans la suivante

$$(11)\quad \frac{f(a,b,c,1)^2}{R^4}+\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)-A-A'-A''}{R^2}f(a,b,c,1)-\frac{dH}{dD}=0.$$

C'est l'équation dont les racines sont les demi-axes de la section. Il ne reste plus qu'à exprimer $f(a, b, c, 1)$ au moyen de α, β, γ, δ et des coefficients de l'équation de la surface.

Pour cela on remarquera que

$$f(a, b, c, 1) = a\,\frac{1}{2}f'(a) + b\,\frac{1}{2}f'(b) + c\,\frac{1}{2}f'(c) \\ + Ca + C'b + C'c + D.$$

Mais de (8) on tire

$$a\,\frac{1}{2}f'(a) + b\,\frac{1}{2}f'(b) + c\,\frac{1}{2}f'(c) = \delta e,$$

donc

$$f(a, b, c, 1) = Ca + C'b + C'c + D + \delta e.$$

Développons le système (8), ajoutons-y l'équation précédente, écrivons, pour l'homogénéité, $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}, \frac{e}{d}$ au lieu de a, b, c, e, et faisons disparaître le dénominateur d, il viendra

$$\begin{aligned}
&Aa + B''b + B'c + cd + \alpha e = 0,\\
&B''a + A'b + Bc + c'd + \beta e = 0,\\
&B'a + Bb + A''c + c''d + \gamma e = 0,\\
&Ca + C'b + C'c + [D - f(a, b, c, 1)]d + \delta e = 0,\\
&\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0.
\end{aligned}$$

Éliminons a, b, c, d, e, on aura

$$\begin{vmatrix}
A & B'' & B' & C & \alpha\\
B'' & A' & B & C' & \beta\\
B' & B & A'' & C'' & \gamma\\
C & C' & C'' & D - f(a, b, c, 1) & \delta\\
\alpha & \beta & \gamma & \delta & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

d'où, évidemment,

$$H + f(a, b, c, 1)\frac{dH}{dD} = 0.$$

Par suite l'équation (11) devient

$$\frac{1}{R^4} - \frac{\frac{dH}{dD}}{H}[\varphi(\alpha, \beta, \gamma) - A - A' - A''] \frac{1}{R^2} - \frac{\left(\frac{dH}{dD}\right)^3}{H^2} = 0,$$

et les équations (3) s'ensuivent immédiatement.

Note. — La question a été résolue aussi par MM. Koehler et Housel.

QUESTIONS.

844. Par un point fixe O, pris sur la circonférence d'un cercle, on mène deux cordes OA, OB dont le produit est constant; on demande l'enveloppe de la sécante AB. (Dupain.)

845. On donne deux surfaces du second degré homofocales A et B; par une droite D prise arbitrairement dans l'espace on mène des plans tangents à cette surface. Soient b et b' les points où deux de ces plans tangents touchent la surface B, a le point où l'un des plans touche la surface A; les droites ab, ab' sont dans le même plan que la normale en a à la surface A, et sont également inclinées sur cette normale. (Laguerre.)

RECTIFICATION.

La « Note sur l'intégration de quelques fonctions contenant un radical du second degré » (octobre 1868, p. 448) a été, par erreur, attribuée à M. Koehler; cette Note est de M. Moch, professeur au Prytanée militaire de la Flèche.

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES D'ALGÈBRE;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

La théorie des *nombres directifs*, de Mourey, procure une démonstration intuitive de plusieurs théorèmes importants, entre autres : 1° du théorème de Cauchy sur le nombre de points-racines contenus dans un contour fermé; 2° du principe fondamental de la théorie des équations algébriques.

Mais d'abord il faut expliquer au lecteur que les nombres directifs sont la réalisation des symboles imaginaires de l'algèbre.

A cet effet, soit tracée une droite sur un plan, et soit pris sur cette droite un point pour origine.

On peut marcher sur cette droite, soit de gauche à droite, ce qui est le sens généralement appelé *positif;* soit de droite à gauche, sens *négatif*. Mais on peut aussi tracer, au-dessus comme au-dessous de cette droite, des chemins rectilignes qui lui soient inclinés sous des angles quelconques.

Si a est le nombre abstrait qui marque le rapport de longueur d'un de ces chemins à l'unité linéaire, ce nombre a peut convenir à une infinité de chemins différents qui auront la même longueur, sans avoir la même direction. Mais si l'on affecte ce nombre d'un indice marquant l'angle que fait la direction du chemin que l'on considère avec celle des chemins positifs (*avec celle de l'unité positive*); si l'on écrit a_ω, ω étant l'angle dont il s'agit, on

aura un symbole propre à ce chemin et exclusif de tous les autres.

Par exemple, si l'angle droit est pris pour unité, a_1 et a_{-1} seront les symboles des deux chemins de longueur a tracés perpendiculairement à la direction positive et opposés l'un à l'autre; a_2 et a_{-2} marqueront tous deux un chemin incliné de deux angles droits; ils équivaudront l'un et l'autre au chemin négatif $-a$. Plus généralement $a_{\omega+1}$ et $a_{\omega-1}$ seront les deux chemins perpendiculaires à a_ω; et $a_{\omega+2}$ aussi bien que $a_{\omega-2}$ représenteront le chemin qui lui est opposé. Enfin, de même que, dans les formules ordinaires de l'algèbre, un symbole littéral, quoique dénué de signe apparent, implique à la fois la grandeur métrique et l'état (positif ou négatif) du nombre, ainsi le symbole littéral peut impliquer l'angle de direction sans en porter l'indice explicitement.

Des nombres qui expriment à la fois une longueur et une direction : c'est là l'idée majeure introduite par Mourey; c'est ce qu'il appelle des *nombres directifs*. Il établit les règles de calcul qui leur conviennent (*), et il se trouve que ces règles coïncident exactement avec celles du calcul des imaginaires, fait capital sur lequel doit se porter l'attention des personnes qui s'intéressent au progrès des *méthodes d'enseignement;* car une telle coïncidence étant une fois reconnue, la science sera en possession de NOMBRES RÉELS correspondant aux expressions algébriques de la forme $a + b\sqrt{-1}$, et le fantôme des NOMBRES IMAGINAIRES se sera évanoui.

L'extrême importance de ce résultat me porte à lui

(*) Dans son petit Traité qui a paru en 1828 sous ce titre : *La véritable Théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires;* dédié aux amis de l'Évidence (1 vol. in-12). M. Gauthier-Villars en a publié récemment une nouvelle édition.

consacrer le paragraphe suivant avant d'en venir à l'objet spécial marqué par le titre de la présente Note.

II.

Pour mettre à l'abri de toute objection le fait que j'ai en vue, je prétends montrer que les règles du calcul directif ne sont pas subordonnées à des conventions nouvelles qu'on introduirait, comme on dit quelquefois, *pour les besoins de la cause*. Je veux montrer qu'elles se présentent comme des conséquences nécessaires : 1° de la nature des opérations élémentaires du calcul ; 2° de la conception particulière des nombres directifs. Entrons donc dans le détail de ces règles.

Addition. — Pour additionner deux nombres directifs, on imaginera les deux chemins qui leur correspondent placés à la suite l'un de l'autre, c'est-à-dire l'origine du second placée au terme du premier. La *somme* demandée sera le nombre relatif au chemin qui conduit de l'origine du premier au terme du second placé comme il vient d'être dit.

Soustraction. — Pour retrancher b de a, on imaginera qu'à la suite du chemin A correspondant à a, on ait tracé un chemin B′ égal en longueur à celui qui correspond à b, mais dirigé en sens contraire. La *différence* demandée sera le nombre correspondant au chemin qui conduit de l'origine de A au terme de B′ (*).

Multiplication. — Le produit des deux nombres directifs a_ω, $a'_{\omega'}$ est égal à $(aa')_{\omega+\omega'}$, c'est-à-dire que sa lon-

(*) Pour s'assurer que ces deux premières règles n'ont rien d'arbitraire, il suffit d'observer que d'autres règles pour l'addition et la soustraction seraient en défaut lorsqu'il s'agirait de combiner deux chemins de même direction ou de directions opposées.

gueur est égale au *produit* des longueurs des deux facteurs, et son inclinaison égale à la *somme* de leurs inclinaisons.

D'après cette règle, chacun des éléments du produit, longueur et direction, est composé avec les éléments des deux facteurs selon l'idée fondamentale de la multiplication, c'est-à-dire composé avec l'élément du multiplicande comme l'élément correspondant du multiplicateur est composé avec l'unité. Cela est évident pour les longueurs; cela est vrai pour les directions; car on voit bien que le produit $(aa')_{\omega+\omega'}$ est incliné sur l'un des deux facteurs, précisément comme l'autre facteur est incliné sur l'unité (positive).

Division. — On aura l'avantage de confirmer la règle précédente si l'on établit directement celle de la division.

A cet effet, je vais résoudre le problème suivant : *Étant donné un nombre directif* a_ω, *trouver la forme nouvelle qui résultera pour ce nombre d'un changement d'unité; par exemple, de ce qu'on prendrait pour nouvelle unité le nombre* $a'_{\omega'}$.

La forme demandée, que je représente provisoirement par x, devra exprimer par ses deux éléments les rapports, tant de grandeur que de direction, du nombre a_ω au nombre $a'_{\omega'}$. Or c'est l'objet propre de la division d'exprimer, par le moyen du quotient, le rapport du dividende au diviseur. Le problème proposé revient donc à la détermination du schéma suivant :

$$x = \frac{a_\omega}{a'_{\omega'}}.$$

D'ailleurs il est manifeste que la nouvelle unité linéaire étant a', la longueur du chemin correspondant à a_ω

aura désormais pour mesure $\frac{a}{a'}$, et il est également manifeste que l'angle de ce chemin avec le chemin mesuré par $a'_{\omega'}$ est $\omega - \omega'$; d'où il suit qu'on a

$$x = \left(\frac{a}{a'}\right)_{\omega - \omega'}.$$

On trouve donc, pour le quotient du nombre a_ω par $a'_{\omega'}$, précisément le nombre qui, multiplié par le diviseur, est propre, selon la règle de la multiplication, à reproduire le dividende.

Tels sont les principes généraux du calcul directif; et maintenant, sans qu'il soit nécessaire de s'arrêter à aucune application (*), son identité avec le calcul des imaginaires résulte manifestement de ce qu'on pourra toujours faire correspondre les deux éléments linéaire et angulaire d'un nombre directif avec le *module* et avec l'*argument* d'un nombre imaginaire.

(*) Toutefois donnons au moins le cas particulier d'un nombre directif a_ω multiplié par lui-même, c'est-à-dire *élevé au carré*. Ce sera d'après la règle de la multiplication $(a^2)_{2\omega}$; et si en particulier $\omega = \pm 1$, on aura

$$(a_{\pm 1})^2 = a^2_{\pm 2}.$$

Mais on sait qu'un nombre incliné de deux angles droits est un nombre négatif; on a donc $(a_{\pm 1})^2 = -a^2$; et par conséquent

$$\sqrt{-a^2} = a_{\pm 1}.$$

Voilà donc les *nombres à carré négatif* dont l'algèbre postule l'existence pour la résolution générale de l'équation du second degré comme elle postule les nombres négatifs pour la résolution de l'équation du premier degré. En particulier, les symboles prétendus imaginaires $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ sont réalisés par deux unités dirigées perpendiculairement au sens positif et opposées l'une à l'autre.

III.

J'arrive maintenant à une démonstration du théorème de Cauchy sur les contours fermés, démonstration qui, j'en préviens d'avance le lecteur, ne sera pas autre au fond que celle donnée autrefois par Sturm dans le *Journal de M. Liouville* (t. I[er], p. 290, en 1836). C'est que la démonstration de Sturm repose précisément, comme M. Liouville en a fait la remarque (t. IV de son Journal, p. 501) sur un lemme dont Mourey avait fait usage antérieurement pour démontrer que toute équation algébrique a au moins une racine. Mais Sturm a employé les symboles ordinaires de l'algèbre, et il n'est pas sans intérêt de reprendre sa démonstration pour voir ce que la franche adoption des idées de Mourey peut lui faire gagner, sinon en rigueur, au moins en concision.

Soit $F(z) = 0$ une équation algébrique du degré m, et soient $a, b, c, \ldots, l$ ses m racines, on a identiquement

$$F(z) = (z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-l);$$

et $a, b, c, \ldots, l$ sont des nombres mesurant les chemins qui conduisent de l'origine aux points-racines A, B, C, ..., L.

Considérons z comme un nombre variable et représentons $F(z)$ par une autre variable u.

z sera le nombre directif mesurant le chemin OZ qui va de l'origine à un point mobile Z, lequel peut occuper sur le plan toutes les situations imaginables.

u mesurera un chemin OU dont l'extrémité U occupera à chaque instant une position unique déterminée par celle du point Z.

D'ailleurs, comme la somme des nombres directifs a et $z-a$ est z, il s'ensuit que $z-a$ mesure le chemin

qui va de A à Z, le chemin AZ. Pareillement, $z - b$, $z - c, \ldots, z - l$ mesurent les chemins BZ, CZ,..., LZ. Et puisqu'on a

$$u = (z - a)(z - b)(z - c)\ldots(z - l),$$

la longueur du chemin OU, pour chaque situation du point Z, est égale au produit des longueurs de AZ, BZ, CZ,..., LZ, et son inclinaison est égale à la somme de leurs inclinaisons.

Supposons maintenant que le point Z parcoure, dans le sens de la rotation directe, un contour fermé. Quand il aura achevé sa révolution, les chemins AZ, BZ,..., LZ, et par conséquent aussi le chemin OU reprendront les longueurs qu'ils avaient au point de départ; mais ils ne reprendront pas tous leurs inclinaisons primitives.

En effet, considérons d'abord un point-racine A extérieur au contour. Pendant la révolution du point Z, l'inclinaison de AZ passera par des alternatives de croissance et de décroissance; mais ces alternatives se compenseront exactement; de sorte qu'ici les inclinaisons initiale et finale seront exactement les mêmes.

Au contraire, si A est à l'intérieur, l'inclinaison de AZ pourra bien encore, d'après la forme du contour, éprouver de telles alternatives; mais ses mouvements rétrogrades seront toujours suivis de mouvements directs, dont l'ensemble l'emportera sur les premiers; de sorte que, en fin de compte, le chemin AZ aura accompli dans le sens direct un tour entier; son angle directif sera donc augmenté d'une circonférence.

Cependant nous avons vu que l'inclinaison de OU est à chaque instant égale à la somme des inclinaisons de tous les facteurs AZ, BZ,...; donc son mouvement autour de l'origine aura pu s'effectuer tantôt dans le sens direct, tantôt dans le sens rétrograde; mais son progrès en sens

direct aura été prépondérant, de sorte qu'à la fin son inclinaison aura augmenté de μ circonférences, s'il y avait μ points-racines enfermés dans le contour que l'extrémité de la variable z a parcouru.

Le théorème de Cauchy est une conséquence immédiate de ces considérations préliminaires.

En effet, lorsqu'on remplace z par $x+y\sqrt{-1}$, ce qui fait prendre à u la forme $P+Q\sqrt{-1}$, on sait que $\frac{P}{Q}$ est la cotangente de l'angle de OU avec la direction positive. Or, si cet angle s'accroît de μ circonférences par un mouvement toujours progressif dans le sens direct, sa cotangente passera 2μ fois du positif au négatif en s'évanouissant; dans ce même cas elle ne passera jamais du négatif au positif par zéro, elle aura donc éprouvé 2μ fois ce que nous avons appelé une *variation descendante* (*), sans d'ailleurs éprouver aucune *variation ascendante*. Mais si ce même angle, avant d'acquérir son accroissement final de μ circonférences, revient plusieurs fois en arrière, sa cotangente pourra avoir des variations ascendantes; mais celles-ci, à cause de la prépondérance des mouvements directs, donneront toujours lieu à un égal nombre de nouvelles variations descendantes; de là le théorème célèbre que : *Le nombre des points-racines contenus dans un contour fermé est égal au demi-excès du nombre des variations descendantes de la fonction* $\frac{P}{Q}$ *sur le nombre de ses variations ascendantes, lorsque le contour est parcouru dans le sens des rotations directes.*

Nota. — Qu'il y ait ou non des points-racines dans

(*) Dans un précédent article : *De la séparation des racines* (janvier 1868).

le contour fermé parcouru par l'extrémité de la variable z, la route parcourue en même temps par l'extrémité de la fonction u sera aussi un contour fermé, puisqu'à la fin la fonction reprend la même longueur avec une inclinaison qui ne peut différer de son inclinaison initiale que d'un nombre entier de circonférences. Seulement dans le premier cas, ce second contour contient l'origine O des chemins OU, et dans le second il ne le contient pas.

IV.

La démonstration précédente du théorème de Cauchy suppose connue la décomposition en facteurs du premier degré de tout polynôme algébrique entier, fonction d'une seule variable; et cette décomposition elle-même résulte, comme on sait, du principe fondamental de la théorie des équations algébriques, que *toute équation a une racine*.

On a, par les méthodes ordinaires de l'algèbre, plusieurs démonstrations de ce principe, qui toutes, soit par l'étendue des connaissances qu'elles exigent, soit seulement par leur complication, sortent du cadre des éléments. La théorie des nombres directifs en donne une démonstration facile, fondée sur la continuité des fonctions entières.

Je m'appuierai aussi sur ce fait, qu'*une équation du degré m ne peut avoir plus de m racines,* proposition qui est indépendante de la question de savoir si *toute équation a une racine.*

Soit donc z_0 une valeur particulière de la variable z, et soit u_0 la valeur correspondante de la fonction $u=f(z)$.

z_0 est le nombre directif qui mesure le chemin rectiligne allant de l'origine O à un certain point Z_0; et u_0 le nombre qui mesure un chemin correspondant OU_0. Je vais montrer qu'à partir du point Z_0, quel qu'il soit, il

existe un chemin conduisant l'extrémité de la variable à un point-racine.

Soit h un accroissement directif de z_0; ce sera un accroissement de longueur fixe, mais dont on fera varier l'inclinaison depuis *zéro* jusqu'à 360 degrés, de sorte que l'extrémité de la variable $z_0 + h$ parcourra un cercle de rayon h ayant son centre au point Z_0. En même temps l'extrémité de la fonction décrira autour du point U_0 une courbe dont le rayon vecteur, lui-même directif, aura pour mesure

$$\Delta u_0 = f(z_0 + h) - f(z_0);$$

ou bien

$$\Delta u_0 = h \left[f' z_0 + \frac{h}{1.2} f''(z_0) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m} f^m(z_0) \right].$$

Or, on pourra toujours prendre h assez petit pour que le facteur ci-dessus entre parenthèses diffère infiniment peu de son premier terme; car la somme directive de tous les termes suivants est moindre que la somme de leurs longueurs prises toutes dans le même sens; proposition qui est d'une évidence intuitive dans la théorie de Mourey, et qui équivaut à ce théorème du calcul des imaginaires que *le module d'une somme est inférieur à la somme des modules*. C'est pourquoi la direction du rayon vecteur Δu_0 relative à une inclinaison quelconque de h, différera toujours infiniment peu de la direction de son premier terme $hf'(z_0)$. Donc, lorsque h aura tourné d'un tour entier autour de z_0, ce qui fera coïncider tous les termes de Δu_0 avec leurs situations primitives, puisque d'une part les longueurs de ces termes sont demeurées les mêmes pendant tout le cours de la révolution de h, et que d'autre part leurs inclinaisons se trouvent à la fin augmentées toutes d'un nombre entier de circonférences, savoir : le premier terme $hf'(z_0)$ d'une circonférence;

le second terme $\frac{h^2}{1.2}f'(z_0)$ de deux circonférences, etc.; à ce moment final, l'extrémité de la fonction aura décrit autour du point U_0 *une courbe fermée à un seul tour.*

A la vérité, si $f'(z_0)$ était nul, cette courbe ne se fermerait qu'après n révolutions correspondantes à une seule révolution de h, en supposant que la première dérivée qui ne s'annule pas soit de l'ordre n; mais on peut écarter la supposition de $f'(z_0)=0$ en choisissant convenablement z_0, puisqu'il y a sur le plan tout au plus $m-1$ valeurs de z pouvant annuler $f'(z)$.

Pour que cette même courbe enveloppe réellement le point U_0, il faut que dans le cours de la révolution de h, la valeur de Δu_0 ne s'annule pas; or c'est ce qu'on peut admettre, sauf à concevoir que h ait été convenablement choisi, puisqu'il n'y a aussi que $m-1$ valeurs de h au plus qui puissent annuler le polynôme

$$f'(z_0)+\frac{h}{1.2}f''(z_0)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots m}f^{m}(z_0).$$

Tout ceci bien compris, la démonstration du principe fondamental de la théorie des équations est aisée. En effet, concevons un chemin de forme quelconque U_0AO conduisant du point U_0 à l'origine O. Ce chemin rencontrera la courbe des Δu_0 en un point U_1 auquel correspondra un point déterminé Z_1 sur le cercle de rayon h et de centre Z_0, et l'on peut toujours supposer la rencontre U_1 choisie de telle sorte que $f'(z_1)$ ne soit pas nulle.

Autour du point Z_1 faisons décrire à l'extrémité de la variable z un cercle de rayon h'; l'extrémité correspondante de la fonction u tracera autour de U_1 une nouvelle courbe fermée. Cette courbe rencontrera le chemin U_1AO, ayant son origine en U_1, en un point U_2 auquel

à son tour correspondra un certain point Z_2 sur le cercle de centre Z_1.

De nouveau autour de Z_2 faisons décrire à l'extrémité de la variable un cercle de rayon h'' choisi dans des conditions analogues aux précédentes, etc. En continuant ainsi, on fera répondre à tous les points du chemin U_0 AO tracé par l'extrémité de la fonction, les points d'un autre chemin $Z_0 Z_1 Z_2 \ldots$ qui sera tracé par les extrémités de la variable. Or quand l'extrémité de la fonction arrivera à l'origine O, c'est-à-dire quand elle s'annulera, l'extrémité de la variable sera manifestement arrivée à un *point-racine*. L'existence nécessaire d'un tel point est donc démontrée.

Mais pourquoi être conduit à un seul point-racine, lorsqu'on sait d'avance qu'il ne peut pas y en avoir un seulement, et que si l'équation quelconque du degré m a une première racine, elle en a $m - 1$ autres nécessairement? Voici ce qu'il y a à répondre : maintenant, en effet, nous savons que toute équation du degré m a m racines. Donc à la valeur u_0 de la fonction u correspond d'abord la valeur z_0, puis $m - 1$ autres valeurs de la variable; c'est-à-dire qu'au point unique U_0 correspondent m points Z_0, origines d'autant de chemins qui conduisent la variable à m points-racines pendant que l'extrémité de la fonction décrit le seul chemin U_0 AO.

Post-scriptum. — La Note qu'on vient de lire fait suite à l'article sur la *Séparation des racines* (janvier et février 1868), et sera elle-même suivie de deux autres articles concernant l'*Application de l'Algèbre directive à la Géométrie*. Dans le premier, je traiterai de l'interprétation des équations algébriques à deux variables, et, dans le second, de la discussion des équations relatives à des problèmes déterminés. On verra alors que

la doctrine des nombres directifs qui s'aide de la Géométrie pour éclairer les premières difficultés de l'Algèbre, faisant disparaître l'antagonisme jusque-là maintenu entre les quantités dites réelles et les quantités prétendues imaginaires, et donnant ainsi à la théorie des équations l'unité qui lui manquait; on verra, dis-je, qu'elle offre à la Géométrie elle-même des ressources nouvelles. Et comme cette même doctrine règne déjà sans opposition dans le domaine de la haute analyse, on peut augurer qu'elle est destinée à transformer tôt ou tard les éléments mêmes de la science. D'ailleurs une circonstance imprévue me confirme dans cette opinion : c'est qu'en corrigeant les épreuves de cet article, j'ai sous les yeux la *Théorie élémentaire des quantités complexes* publiée tout récemment par M. Hoüel, dont le nom est bien connu des lecteurs de ce Journal. L'objet de l'auteur est précisément d'expliquer la représentation géométrique des quantités imaginaires par des grandeurs réelles. Dans la *première Partie* de son livre, la seule qui ait encore paru, M. Hoüel, après avoir donné des renseignements précieux sur l'*Histoire de la Théorie géométrique des imaginaires*, expose en détail les règles du nouveau calcul, et il en fait une très-belle application au principe fondamental de la théorie des équations. Il établit d'une manière simple et rapide, par rapport à toute équation algébrique $f(z) = 0$, qu'il existe dans la région finie du plan au moins une valeur de z qui rend minimum le module de $f(z)$, et que ce module minimum ne peut être autre que zéro. Or telle était, comme on sait, la déduction constituant la pénible démonstration algébrique donnée autrefois par Cauchy. Mais, pour établir l'opportunité de la thèse que MM. les Rédacteurs des *Nouvelles Annales* m'ont autorisé à développer dans leur Recueil, je tiens surtout à citer textuellement le début du livre de M. Hoüel :

« Une des plus grandes difficultés qu'éprouvent les commençants en abordant l'étude de l'Algèbre, c'est, dit M. Hoüel, l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires. Les géomètres qui ont assis sur des bases inébranlables les règles du

calcul de ces symboles ont rendu un immense service à la philosophie mathématique. On peut cependant ne pas se trouver encore pleinement satisfait de leurs démonstrations, qui sont d'une rigueur inattaquable sans doute, mais qui laissent subsister dans les Mathématiques des symboles de quantités et des signes d'opérations qui semblent ne correspondre à rien de réel. Les raisonnements généralement employés reviennent à établir qu'il y a *compensation entre deux absurdités*, savoir : entre la considération de quantités dont l'existence implique contradiction, et entre l'application à ces quantités d'opérations qui n'ont de sens que pour les quantités réelles. » (Hoüel, *Théorie élémentaire des quantités complexes*, p. 1.)

Si le lecteur veut bien se reporter à l'article *Sur le principe et la règle des signes* publié dans le numéro de juillet 1867 des *Nouvelles Annales*, article qui forme le préliminaire de toute cette exposition, il verra que M. Duhamel, dont l'autorité est généralement acceptée dans ces sortes de questions, admet et explique, dans son *Traité des Méthodes de raisonnement dans les sciences*, que certains symboles de l'Algèbre sont dénués de toute signification et sont soumis à des opérations auxquelles il faut bien se garder d'attribuer aucun sens ! Cette appréciation est, comme on voit, parfaitement conforme à celle de M. Hoüel ; mais celui-ci tend directement, par sa *Théorie des Nombres complexes*, à affranchir la science d'une si dure nécessité. Et, en effet, peut-on admettre définitivement au nombre des *méthodes de raisonnement dans les sciences* une méthode qui, selon l'énergique déclaration rapportée ci-dessus, procède par des COMPENSATIONS D'ABSURDITÉS ?

RÉPONSE A UNE OBSERVATION

Présentée dans le *Giornale di Matematiche*;

PAR M. DE JONQUIÈRES.

Le tome V du *Giornale di Matematiche* contient (p. 377) un article qui a pour but de démontrer l'inexactitude d'un théorème énoncé par moi dans une occasion précédente, et qui est ainsi conçu :

*Une série de courbes de degré m et d'*indice μ *peut toujours être représentée par une équation algébrique entière et rationnelle du degré m par rapport aux coordonnées x, y, et dans les coefficients de laquelle une indéterminée* λ *entre au degré* μ.

C'est dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (livraison du mois d'avril 1861) que j'avais, pour la première fois, énoncé cette proposition sous forme de *lemme*.

L'auteur montre, par un exemple particulier, qu'elle conduit à des résultats inexacts, et sa critique est fort juste, je m'empresse de le dire.

D'autres géomètres avaient déjà fait la remarque qu'il eût sans doute fallu dire *du degré m ou d'un multiple de m*, et le *Giornale* lui-même a publié précédemment un article intéressant, dans lequel M. Battaglini traite cette question d'une manière générale.

De mon côté, ayant eu occasion de revenir sur ce sujet dans une Note adressée à l'Académie des Sciences (novembre 1866), je déclarai que le lemme dont il s'agit est inexact, et peu de temps après, dans un Mémoire que je

publiai sous le titre de *Recherches sur les Séries, etc.* (*), je montrai qu'on pouvait s'en passer pour l'usage auquel je l'avais fait servir en 1861, me bornant à ajouter : « Une équation algébrique du degré m en x et y, entière et rationnelle, dans les coefficients de laquelle une indéterminée λ entre au degré μ, représente évidemment, à elle seule, une série de degré m et d'indice μ. *Il peut arriver* que toutes les conditions données soient effectivement réductibles à cette forme simple. C'est, en particulier, ce qui a toujours lieu quand les courbes ou les surfaces données ont les mêmes points d'intersection et forment un faisceau. L'indice μ est alors égal à l'unité, et l'équation de la série prend alors la forme $S + \lambda S' = 0$, due à M. Lamé; $S = 0$ et $S' = 0$ étant les équations de deux quelconques des courbes ou surfaces de la série. »

Ainsi l'auteur de l'article du *Giornale* trouvera tous les esprits préparés de longue date à admettre sa réfutation. Quant à la réflexion par laquelle il termine, et qui est ainsi conçue : « Les observations qui précèdent ne m'ont pas paru indignes d'être remarquées, attendu qu'elles portent sur un théorème important qui se présente au début de la théorie des séries de courbes d'indice quelconque, » je le prierai de remarquer qu'elle n'a pas les conséquences qu'il paraît redouter.

En effet, toute la théorie des séries peut, comme je l'ai fait voir dans le Mémoire cité plus haut (*Recherches, etc.*), être établie sans tirer aucun secours du lemme incriminé, de telle sorte que ce lemme, tout inexact qu'il était, n'avait pas entaché les propositions fondamentales que j'en avais d'abord déduites. Qu'il me soit permis de revenir en peu de mots sur ce sujet.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe générale

(*) Publié chez M. Gauthier-Villars. In-4; 1866.

du degré m. Si l'on y joint les $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ équations entre les coefficients, dont chacune exprime une des conditions proposées, ce système de $\frac{m(m+3)}{2}$ équations définit complétement la *série* des courbes qui satisfont à ces conditions.

Supposons qu'on fasse $x = \alpha$, $y = \beta$ dans l'équation (F), α et β étant des constantes, et qu'on forme l'équation finale (dégagée effectivement ou théoriquement des solutions étrangères que la marche du calcul de l'élimination a pu introduire), qui résulte de l'élimination de tous les coefficients, moins un, entre les $\frac{m(m+3)}{2}$ équations; le degré μ de cette équation finale indique évidemment le nombre des courbes de la série qui passent par le point arbitraire $x = \alpha$, $y = \beta$; μ est donc ce que j'ai appelé (en 1861) l'*indice* de la série proposée, et cet indice est, comme on le voit, une conséquence directe, naturelle et nécessaire des conditions données, si l'équation (F) est, comme on l'a supposé, exprimée en coordonnées cartésiennes ou *ponctuelles* (*).

Une question quelconque, concernant les propriétés projectives, intrinsèques ou relatives d'une série, peut toujours être regardée comme traduite par une équation de condition entre les coefficients de l'équation générale $F(x, y) = 0$. Soit N le degré de cette équation qu'il faut

---

(*) Si l'équation (F) était exprimée en coordonnées tangentielles, l'*indice* qui en serait la conséquence ne serait plus le même. Ce serait celui qui indique combien il y aurait, dans la *série*, de courbes touchant une droite quelconque. Cette double circonstance se présente accidentellement pour les courbes (et les surfaces) du second degré, parce qu'elles sont à la fois du *second degré* et de la *seconde classe*; mais ce sont les seules qui jouissent de cet heureux privilège. Il cesse pour les courbes et les surfaces d'ordre supérieur.

joindre aux $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ autres équations exprimant les conditions communes aux courbes de la série. On voit que la question proposée admet, en général et au plus, μN solutions, puisque μ exprime le degré de l'équation finale qui résulterait de l'élimination de tous les coefficients, moins un, entre ces $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ équations et celle de la courbe où ils sont tous au premier degré.

Or, si l'on eût cherché à résoudre la même question relativement à un simple *faisceau* de courbes (ou de surfaces) du même degré, le nombre des solutions eût été N, puisque, dans ce cas, toutes les équations de condition sont du premier degré.

On a donc immédiatement ce théorème important :

Dans toute question relative aux propriétés projectives d'une série de courbes ou de surfaces, le nombre des solutions est, en général et au plus, égal à μ fois ce qu'il serait, dans la même question, pour un simple faisceau, μ étant l'indice de la série.

L'étude générale des propriétés des séries se trouve ainsi réduite à celle des simples faisceaux; simplification d'autant plus importante qu'on ne connaît jusqu'ici, en dehors *du second degré*, aucune autre méthode, que je sache, qui permette d'aborder avec efficacité cette étude difficile. On en conclut, par exemple, ce théorème fondamental, qui se démontre d'ailleurs directement par des considérations fort différentes et directes, savoir que

Le nombre des courbes d'une série de degré m et d'indice μ, qui touchent une droite quelconque, est égal à $2(m-1)\mu$;

Et cet autre :

Le nombre des surfaces d'une série de degré m et d'indice μ, qui touchent un plan quelconque, est en général égal à $3\,\overline{(m-1)}^2\,\mu$; *et le nombre de celles qui ont un point double est en général* $4\,(m-1)^3\,\mu$;

Etc., etc.

Ainsi exprimés, ces théorèmes comprennent toutes les courbes ou toutes les surfaces de la série qui satisfont à l'énoncé, et même celles qui se décomposent en courbes ou surfaces multiples d'ordres inférieurs. Mais j'ai montré, dans le Mémoire précité, que s'il s'agit notamment des *séries élémentaires*, c'est-à-dire des séries où les conditions données ne consistent qu'à traverser des points donnés et à toucher des droites ou des plans donnés, on peut toujours, en regardant ces séries comme étant rangées dans leur ordre naturel, déterminer aisément *à priori* la limite précise à partir de laquelle ces courbes ou surfaces singulières se présentent, de telle sorte que, pour toutes les séries comprises en deçà de cette limite, les théorèmes ci-dessus se rapportent exclusivement à des courbes ou à des surfaces *proprement dites* du degré que l'on considère, sans aucune restriction relative aux courbes ou surfaces singulières que les séries contiennent parfois, mais qu'elles ne contiennent jamais dans ce cas (*).

Mais je n'entrerai pas, à ce sujet, dans plus de détails, mon but n'étant pas de refaire ni de reproduire ici le

(*) Comme il y a continuité dans la succession des *séries* élémentaires qui contiennent les courbes ou surfaces singulières, ainsi que dans celles qui n'en comprennent aucune, et qu'une règle précise et invariable détermine la limite qui sépare les unes des autres, les théorèmes en question ont eux-mêmes toute la précision et la rigueur qu'on peut désirer en mathématiques, où l'on voit, à chaque instant, que certaines propriétés qui ont lieu dans une certaine partie d'une figure, par exemple, cessent d'exister dans une autre, à partir d'un point de démarcation nettement déterminé.

Mémoire de 1866, d'où j'ai extrait les passages qui précèdent.

Je tenais simplement à montrer que l'inexactitude, reconnue par moi depuis assez longtemps, du lemme cité dans le *Giornale di Matematiche,* ne porte aucune atteinte aux théorèmes essentiels et fondamentaux de la théorie des séries de courbes et de surfaces que l'auteur de cet article a en vue.

Je saisis cette occasion pour répondre à une observation contenue dans un article que M. Breton (de Champ) a publié dernièrement dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. VI, p. 522), et qui me concerne, comme étant l'un des auteurs des deux Notices bibliographiques auxquelles ce savant géomètre fait allusion. En faisant l'éloge de l'ouvrage dont il parle, je ne pouvais avoir en vue des questions de priorité, dont les éléments ne m'étaient pas connus et que je n'avais pas étudiées. Je prie donc M. Breton de ne point attribuer à ma rédaction plus de portée qu'elle n'en a à cet égard.

NOTE SUR LE PLAN TANGENT EN UN POINT D'UNE SURFACE;

PAR M. LAISANT,
Capitaine du génie.

Dans les problèmes de géométrie à trois dimensions, une surface est souvent déterminée par deux équations

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad (1)$$

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad (2)$$



dans lesquelles α est un paramètre qu'il faudrait éliminer pour avoir l'équation de la surface.

Il peut être intéressant de déterminer le plan tangent en un point X, Y, Z de cette surface, sans effectuer l'élimination; c'est ce que nous allons essayer.

L'équation (1) peut être considérée comme l'équation de la surface, si nous supposons qu'on ait remplacé α par sa valeur tirée de l'équation (2). Ceci admis, posons $F(x, y, z, \alpha) = \varphi(x, y, z)$. L'équation du plan tangent en X, Y, Z est

$$(x - X)\varphi'_x(X, Y, Z) + (y - Y)\varphi'_y(X, Y, Z) + (z - Z)\varphi'_z(X, Y, Z) = 0;$$

Or

$$\varphi'_x(X, Y, Z) = F'_x(X, Y, Z, \alpha) + F'_\alpha(X, Y, Z, \alpha)\,\alpha'_x.$$

De (2) nous tirons, en prenant la dérivée par rapport à x,

$$f'_x(X, Y, Z, \alpha) + f'_\alpha(X, Y, Z, \alpha)\,\alpha'_x = 0,$$

d'où

$$\alpha'_x = -\frac{f'_x(X, Y, Z, \alpha)}{f'_\alpha(X, Y, Z, \alpha)}.$$

Donc

$$\varphi'_x(X, Y, Z = F'_x(X, Y, Z, \alpha) - \frac{F'_\alpha(X, Y, Z, \alpha) f'_x(X, Y, Z, \alpha)}{f''_\alpha(X, Y, Z, \alpha)}$$

ou, plus simplement,

$$\varphi'_x = F'_x - \frac{F'_\alpha f'_x}{f'_\alpha}.$$

Nous aurons de même

$$\varphi'_y = F'_y - \frac{F'_\alpha f'_y}{f''_\alpha} \quad \text{et} \quad \varphi'_z = F'_z - \frac{F'_\alpha f''_z}{f'_\alpha},$$

et l'équation du plan tangent deviendra, en multipliant par f'_α,

$$(x-X)(F'_x f'_\alpha - F'_\alpha f'_x) + (y-Y)(F'_y f'_\alpha - F'_\alpha f'_y) \\ + (z-Z)(F'_z f'_\alpha - F'_\alpha f'_z) = 0.$$

Il est bon de rappeler que les coefficients de $x-X$, $y-Y$, $z-Z$ sont proportionnels aux cosinus des angles que forme le plan tangent avec les plans des yz, des zx et des xy.

Comme application de ce qui précède, nous allons traiter la question 700, dont l'énoncé est le suivant :

La surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement. (STREBOR.)

Après les excellentes solutions de M. Picart et de M. Durrande, publiées dans ce Recueil (2e série, t. III, p. 532, et t. IV, p. 125), nous n'aborderions pas cette question, si nous n'avions simplement pour objet de montrer en quoi peut servir le procédé que nous avons indiqué.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'un des ellipsoïdes. On sait, en supposant $a > b > c$, que la section circulaire diamétrale est déterminée par cette équation et la suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0.$$

On a, en outre,

$$a^2 - b^2 = \text{const.} \quad \text{et} \quad b^2 - c^2 = \text{const.};$$

d'où

$$a'_b = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad c'_b = \frac{b}{c}.$$

On peut considérer b comme le seul paramètre variable, et la recherche du plan tangent, au lieu des sections circulaires, rentre dans le cas général examiné plus haut. Les cosinus des angles λ, μ, ν que forme ce plan avec les plans coordonnés sont proportionnels, d'après la formule trouvée, aux quantités

$$-\frac{bx}{a^2}+x\left(\frac{bx^2}{a^4}+\frac{by^2}{b^4}+\frac{bz^2}{c^4}\right),$$

$$-\frac{by}{b^2}+y\left(\frac{bx^2}{a^4}+\frac{by^2}{b^4}+\frac{bz^2}{c^4}\right),$$

$$-\frac{bz}{c^2}+z\left(\frac{bx^2}{a^4}+\frac{by^2}{b^4}+\frac{bz^2}{c^4}\right),$$

c'est-à-dire à

$$x\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{x}{a^2},$$

$$y\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{y}{b^2},$$

$$z\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{z}{c^2}.$$

D'un autre côté, les cosinus des angles λ', μ', ν', pour le plan tangent à l'ellipsoïde, sont proportionnels à

$$\frac{x}{a^2},\quad \frac{y}{b^2},\quad \frac{z}{c^2}.$$

Donc $\cos\lambda\cos\lambda'+\cos\mu\cos\mu'+\cos\nu\cos\nu'$, ou le cosinus de l'angle des deux plans, est proportionnel à

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)$$
$$-\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{z^2}{c^4}$$

ou

$$\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

quantité identiquement nulle, puisque le second facteur est nul pour tout point de l'ellipsoïde. Il en résulte donc que les deux plans tangents se coupent à angle droit.

RELATIONS ENTRE LES RAYONS DE COURBURE DE QUELQUES SYSTÈMES DE COURBES;

PAR M. A. CHEMIN.

M. Nicolaïdès a proposé, dans ce Journal, de démontrer la formule $\frac{n}{\rho}+\frac{m}{\rho_1}=2$, qui lie les rayons de courbure ρ et ρ' en deux points correspondants de deux courbes, dont l'une est la transformée de l'autre par rayons vecteurs réciproques.

On peut facilement établir une relation du même genre, mais beaucoup plus générale, d'où la précédente se déduit comme cas particulier. Soient m courbes quelconques (A), (B),... dans un plan; a, b, c,... les segments qu'elles déterminent sur une transversale passant constamment par un point fixe o de leur plan, ces segments étant comptés à partir du point o.

Soient aussi dans le même plan $(m-1)$ autres courbes (A'), (B'),...; a', b', c',..., les segments analogues aux précédents et comptés de la même manière.

Déterminons pour ce second groupe une $m^{ième}$ courbe, par la condition que son rayon vecteur x, compté à partir du point o, satisfasse à la relation

$$(1)\qquad a.b.c\ldots = x.a'.b'\ldots.$$

Je vais déterminer la relation qui existe entre les

rayons de courbure de toutes ces courbes aux points où elles sont rencontrées par la transversale considérée.

Prenons les logarithmes des deux membres de (1), différentions et divisons le tout par $d\omega$; nous aurons

$$(2)\quad \frac{da}{a\,d\omega}+\frac{db}{b\,d\omega}+\ldots=\frac{dx}{x\,d\omega}+\frac{da'}{a'\,d\omega}\ \text{ou}\ \sum\frac{da}{a\,d\omega}=\sum\frac{dx}{x\,d\omega}.$$

Mais, d'après une formule connue de Géométrie analytique, on a, en coordonnées polaires,

$$\operatorname{tang}\nu=\frac{r\,d\omega}{dr},$$

r étant le rayon vecteur d'un point de la courbe qu'on considère, et ν l'angle formé par la tangente avec le prolongement du rayon vecteur, et compté dans le sens positif des angles polaires.

Soient α, β, γ, . . ., ξ, α', β', . . ., les angles analogues à ν pour les différentes courbes (A), (B); l'équation (2) peut s'écrire

$$(3)\qquad \sum\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}=\sum\frac{1}{\operatorname{tang}\xi}.$$

Cette relation permet de construire géométriquement la tangente en un point quelconque de la courbe (X).

Avant d'aller plus loin, je rappellerai deux formules connues, dont j'ai déjà fait plusieurs fois usage,

$$ds=n\,d\omega=\rho\,d\theta,\quad d\theta=d\omega+d\nu,$$

ds étant l'élément d'arc, n la normale polaire, ρ le rayon de courbure, $d\theta$ l'angle de contingence, ν ayant la signification indiquée plus haut.

La relation (3) différentiée donne, quand on change le signe de deux termes,

$$(4)\qquad \sum\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}=\sum\frac{d\xi}{\sin^2\xi}.$$

On a, en général,

$$\sin \nu = \frac{r}{n}.$$

Soient A, B,..., X', A', B',... les normales polaires des différentes courbes; l'expression devient, quand on remplace les sinus par leurs valeurs,

$$(5) \qquad \sum \frac{A^2}{a^2} d\alpha = \sum \frac{X^2}{x^2} d\xi.$$

La formule $d\theta = d\omega + d\nu$ donne

$$(6) \qquad d\nu = d\theta - d\omega;$$

la formule $n d\omega = \rho d\theta$ conduit à

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{n d\omega};$$

la relation (5) pourra donc s'écrire, en divisant tout par $d\omega$, remplaçant $d\alpha$, $d\beta$,.. par leurs valeurs, et appelant $d\theta$, $d\theta_1$, $d\theta_2$,..., $d\theta'$, $d\theta'_1$,... les angles de contingence des différentes courbes,

$$(8) \qquad \sum \frac{A^3}{a^2}\left(\frac{d\theta - d\omega}{A d\omega}\right) = \sum \frac{X^3}{x^2}\left(\frac{d\theta' - d\omega}{X d\omega}\right),$$

ou bien, en tenant compte des relations (6) et (7), on obtient la relation suivante

$$(9) \qquad \sum \frac{A^3}{a^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{A}\right) = \sum \frac{X^3}{x^2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{X}\right),$$

que nous avions en vue d'établir.

Pour retrouver la formule de M. Nicolaïdès, supposons $m = 2$, ou le premier système se réduisant à A et B, et le second à X et A'. Supposons, de plus, que les deux premières courbes soient deux courbes de même rayon, ayant leur centre en o. Nous sommes alors dans

le cas de la transformation par rayons vecteurs réciproques, et $A = B = \rho = \rho'$. Le premier membre de la relation (9) s'annule, et nous avons

$$\frac{X^2}{x^2}\left(\frac{1}{\rho_x} - \frac{1}{X}\right) + \frac{A'^2}{a'^2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{A'}\right) = 0,$$

ou bien encore

$$(1') \qquad \frac{X^2}{x^2}\left(\frac{X}{\rho_x} - 1\right) + \frac{A'^2}{a'^2}\left(\frac{A'}{\rho'} - 1\right);$$

or

$$\frac{x}{X} = \sin\xi, \quad \frac{a'}{A'} = \sin\alpha',$$

et, d'après les propriétés connues de la transformation par rayons vecteurs réciproques,

$$\alpha' + \xi = \varpi,$$

par suite,

$$\sin\alpha' = \sin\xi \quad \text{ou} \quad \frac{X}{x} = \frac{A'}{a'}.$$

En divisant donc l'équation (1') par $\frac{X}{x}$, nous obtenons

$$(2') \qquad \frac{X}{\rho_x} + \frac{A'}{\rho'} = 2.$$

C'est, sauf la différence de notation, la formule trouvée par M. Nicolaïdès.

Supposons que les m rayons vecteurs a, b, c soient ceux qui correspondent aux points d'intersection d'une courbe du $m^{ième}$ degré coupée par la transversale issue du point o. Déterminons une autre courbe, par la condition que son rayon vecteur a' remplisse la condition

$$(10) \qquad abc\ldots = a'^m.$$

La formule (9) trouvée plus haut nous donne

$$\sum \frac{A^3}{a^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{A}\right) = \frac{nA'^3}{a'^2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{A'}\right),$$

ou bien, puisque $\frac{A}{a} = \frac{\rho_1}{\sin\alpha}$,

$$\sum \left(\frac{a}{\rho \sin^3\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = \frac{na'}{\rho' \sin^3\alpha'} - \frac{n}{\sin^2\alpha'}.$$

Supposons maintenant que, la direction de la transversale restant fixe et d'ailleurs quelconque, le point o s'éloigne à l'infini sur la transversale. Le lieu du point X devient une droite, comme on pourra facilement le vérifier. Alors $\frac{1}{\rho'} = 0$, et, en divisant tout par a et supposant a, b,... infinis, nous arrivons à la relation

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^3\alpha} = 0,$$

énoncée dans ce Recueil par M. Mannheim.

Cette formule, à laquelle nous parvenons ainsi, peut se déduire comme conséquence d'un autre théorème, et même se généraliser.

Considérons deux systèmes de m courbes dans un même plan

$$(A), (B), \ldots, \quad (A'), (B'), \ldots,$$

dont les rayons vecteurs, comptés sur une même transversale passant par un même point fixe o du plan et à partir de ce point, vérifient la relation

$$(\alpha) \qquad \sum a^m = \sum a'^m.$$

Nous allons chercher une relation entre les rayons de courbures de ces courbes aux points où elles sont ren-

contrées par la transversale. Différentions et divisons par m

$$(\beta)\qquad \sum a^{m-1}da = \sum a'^{m-1}da'.$$

Cette relation, divisée par $d\omega$, peut s'écrire

$$(\gamma)\ \sum a^m \frac{da}{a\,d\omega} = \sum a'^m \frac{da'}{a'\,d\omega} \quad \text{ou} \quad \sum \frac{a^m}{\tang\alpha} = \sum \frac{a'^m}{\tang\alpha'}.$$

Différentions une seconde fois

$$\sum\left(\frac{m a^{m-1}da}{\tang\alpha} - a^m \frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = \sum\left(\frac{m a'^{m-1}da'}{\tang\alpha'} - a'^m \frac{d\alpha'}{\sin^2\alpha'}\right).$$

Cette équation, divisée par $d\omega$, peut s'écrire

$$\sum\left(\frac{m a^m}{\tang\alpha}\frac{da}{a\,d\omega} - a^m\frac{\frac{d\alpha}{d\omega}}{\sin^2\alpha}\right) = \sum\left(\frac{m a'^m}{\tang\alpha'}\frac{da'}{a'\,d\omega} - a'^m\frac{\frac{d\alpha'}{d\omega}}{\sin^2\alpha'}\right).$$

Mais, puisque $d\alpha = d\theta - d\omega$ et que $\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n}{\rho}$, nous aurons, en conservant les mêmes notations que plus haut,

$$\sum\left[m\frac{a^m}{\tang^2\alpha} - a^m\frac{\left(\frac{A}{\rho} - 1\right)}{\sin^2\alpha}\right] = \sum\left[m\frac{a'^m}{\tang^2\alpha'} - a'^m\frac{\left(\frac{A'}{\rho} - 1\right)}{\sin^2\alpha'}\right]$$

ou bien

$$\sum\frac{a^m}{\sin^2\alpha}\left(m\cos^2\alpha + 1 - \frac{A}{\rho}\right) = \sum\frac{a'^m}{\sin^2\alpha'}\left(m\cos^2\alpha' + 1 - \frac{A'}{\rho}\right),$$

et, en remplaçant $\cos^2\alpha$ par $1 - \sin^2\alpha$, et, supprimant dans le premier membre $m\sum a^m$ et dans le second

$m\sum a'^m$, qui sont égaux, l'expression se réduit à

$$(11)\quad \sum \frac{a^m}{\sin^2\alpha}\left(m+1-\frac{A}{\rho}\right)=\sum \frac{a'^m}{\sin^2\alpha'}\left(m'+1-\frac{A'}{\rho'}\right).$$

C'est l'expression générale cherchée, où m peut recevoir une valeur quelconque.

En donnant à m des valeurs particulières, on obtient des formules qui présentent quelque intérêt.

Si on suppose $m=1$, $a=$ const., on obtient la formule qui donne le rayon de courbure d'une courbe dérivant d'une courbe donnée, comme la conchoïde dérive d'une droite.

Le cas le plus intéressant résulte de la supposition $m=-1$. La formule (α) devient

$$(\alpha')\qquad \sum \frac{1}{a}=\sum \frac{1}{a'},$$

et la formule (11) se réduit, dans cette hypothèse, à

$$(12)\qquad \sum \frac{1}{a\sin^2\alpha}\,\frac{A}{\rho}=\sum \frac{1}{a'\sin^2\alpha'}\,\frac{A'}{\rho'};$$

mais, en général,

$$\frac{A}{a}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

En substituant dans (12), nous avons la relation remarquable

$$(13)\qquad \sum \frac{1}{\rho\sin^3\alpha}=\sum \frac{1}{\rho'\sin^3\alpha'}.$$

Supposons que les m rayons vecteurs $a, b, \ldots$, soient ceux qui correspondent aux points d'intersection d'une courbe algébrique d'ordre m par la transversale. De plus, supposons que les m rayons vecteurs $a', b', \ldots$, soient

égaux entre eux, la relation (α') devient, dans ce cas,

$$(\alpha'') \qquad \sum \frac{1}{a} = \frac{m}{a'},$$

relation qui donne le centre harmonique des m points d'intersection A, B,.... Or, on sait que, dans le cas d'une courbe algébrique, le lieu du point A' est une droite; donc $\frac{1}{\rho'} = 0$, et la formule (13) devient, dans ce cas,

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^3 \alpha} = 0.$$

Nous retrouvons la relation de M. Mannheim.

Quand la courbe, étant toujours rencontrée par la transversale en m points, n'est plus algébrique, le lieu du point A' n'est plus une droite, mais une courbe qui joue le même rôle que la polaire rectiligne; le second membre de la relation ne s'annule plus, et la formule devient, dans ce cas,

$$\sum \frac{1}{\rho \sin^3 \alpha} = \frac{m}{\rho' \sin^3 \alpha'},$$

et, comme la longueur des rayons vecteurs n'entre pas dans cette formule, elle peut s'appliquer, quelle que soit la position du point o sur la transversale, à distance finie ou indéfinie.

Cette relation s'applique donc aussi bien à la polaire du point o qu'au diamètre relatif à la direction supposée fixe de la transversale.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 816, 817 *et* 819

(voir 2e série, t. VI, p. 384);

PAR M. N. GELSKI,
Élève externe de l'École des Mines.

816. *En supposant répartie le long d'une spirale logarithmique une densité proportionnelle à la courbure, le centre de gravité d'un arc quelconque s'obtient en joignant le pôle au point de contact de cet arc avec la tangente parallèle à la corde, et portant sur ce rayon vecteur une longueur égale au rapport de cette corde à l'angle des rayons extrêmes.*

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soit

$$r = e^{a\theta}$$

l'équation de la spirale.

La masse de l'arc M_0M_1 sera

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} ds\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = \theta_1 - \theta_0.$$

En appelant ξ et η les coordonnées du centre de gravité, et $y_1 = r_1 \sin\theta_1$, $x_1 = r_1\cos\theta_1$, $y_0 = r_0\sin\theta_0$, $x_0 = r_0\cos\theta_0$ les coordonnées des points extrêmes M_1 et M_0, on trouve, pour les moments des masses par rapport aux axes θx et θy,

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} r\sin\theta\, d\theta = (\theta_1 - \theta_0)\eta, \quad \int_{\theta_0}^{\theta_1} r\cos\theta\, d\theta = (\theta_1 - \theta_0)\xi.$$

En effectuant l'intégration par parties

$$(\theta_1 - \theta_0)\eta = \frac{a}{1+a^2}(y_1 - y_0) - \frac{1}{1+a^2}(x_1 - x_0),$$

$$(\theta_1 - \theta_0)\xi = \frac{a}{1+a^2}(x_1 - x_0) + \frac{1}{1+a^2}(y_1 - y_0).$$

En divisant membre à membre ces deux équations, et remarquant que $a = \operatorname{tang}\mu$, μ étant l'angle constant formé par la normale avec le rayon vecteur, et en appelant θ l'angle formé par le rayon vecteur contenant le centre de gravité, et φ l'angle formé par la corde M_0M_1 avec la partie positive de l'axe θx,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\operatorname{tang}\mu . \operatorname{tang}\varphi - 1}{\operatorname{tang}\mu + \operatorname{tang}\varphi} = -\frac{1}{\operatorname{tang}(\mu+\varphi)},$$

d'où

$$\theta = \mu + \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on mène la tangente parallèle à la corde M_0M_1, le point M, où elle touche l'arc M_0M_1, se trouve sur le rayon vecteur qui forme avec l'axe polaire l'angle précédemment trouvé. Donc la première partie du problème se trouve démontrée.

Élevant à présent au carré et ajoutant

$$(\theta_1 - \theta_0)\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2},$$

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\cos\mu \times \text{corde } M_0M_1}{\theta_1 - \theta_0},$$

c'est-à-dire que la distance du centre de gravité au foyer est égale au rapport de la corde à l'angle des rayons extrêmes multiplié par le *facteur constant* $\cos\mu$.

Note. — Cette question a été résolue à peu près de la même manière par MM. Pelet, élève du lycée de Nîmes, et L. Bignon, de Lima.

817. *Si l'on considère de même une cycloïde dont la densité soit proportionnelle à la courbure, et un arc quelconque symétrique par rapport au sommet, le centre de gravité de cet arc se trouve sur l'axe de la courbe à une hauteur au-dessus de son milieu qui est une quatrième proportionnelle au rayon du cercle générateur et aux deux segments que la tangente au point extrême détermine sur l'abscisse de ce point comptée à partir du sommet de la tangente.*

Pour la cycloïde entière, le centre de gravité de la courbure se trouve, d'après cela, au milieu de la hauteur.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

En appelant θ l'angle formé par une normale quelconque à la cycloïde avec son axe, on a, pour l'expression de la masse de l'arc M_0M_1 symétrique par rapport au sommet s de cette courbe,

$$\int_{-\theta_1}^{\theta_1} ds\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = 2\theta_1.$$

Le centre de gravité, qui, par suite de la symétrie, se trouve sur l'axe de la courbe, sera complétement déterminé si l'on connaît l'ordonnée η comptée à partir de la base de la courbe.

Les moments des masses de l'arc M_0M_1 par rapport à cette base sont

$$2\theta_1\eta = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} d\theta\, 2a\cos^2\theta = 2a\theta_1 + a\sin 2\theta_1,$$

d'où

$$\eta = \frac{(2a\theta_1 + a\sin 2\theta_1)a}{2a\theta_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Car a est le rayon du cercle générateur;

$2a\theta_1 + a \sin 2\theta_1$ est l'abscisse du point extrême M_1 comptée sur la tangente au sommet et à partir de ce point;

$2a\theta_1$ est le segment détaché sur cette abscisse par la tangente en M_1.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\eta = a$, c'est-à-dire que le centre de gravité de la cycloïde entière se trouve au milieu de la hauteur.

Note. — Solution analogue de M. Bignon, de Lima.

819. *Si la densité de la chaînette varie en raison inverse de la hauteur au-dessus de la directrice, le centre de gravité d'un arc quelconque compté à partir du sommet a pour abscisse la moitié de l'abscisse extrême, et pour ordonnée la hauteur du rectangle qui aurait la même aire et la même base horizontale que la courbe et que l'on sait facilement construire.*

(Haton de la Goupillière.)

Nous avons, pour l'expression de la masse d'un arc compté à partir du sommet,

$$\int_0^{x_1} ds \frac{1}{y} = \frac{1}{a}\int_0^{x_1} dx = \frac{x_1}{a}.$$

Pour les moments par rapport aux axes θx et θy; en appelant ξ et η les coordonnées du centre de gravité et θ l'inclinaison de la tangente, on a

$$\frac{x_1}{a}\xi = \int_0^{x_1} ds \frac{1}{y} x = \frac{1}{a}\int_0^{x_1} x dx = \frac{x_1^2}{2a};$$

d'où

$$\xi = \frac{1}{2} x_1,$$

$$\frac{x_1}{a}\eta = \int_0^{x_1} ds \frac{1}{y} y = a\int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = a \tang \theta_1,$$

d'où

$$\eta = \frac{a^2 \operatorname{tang} \theta_1}{x_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Or l'aire correspondante de la courbe est

$$\int_0^{x_1} y\,dx = a^2 \operatorname{tang} \theta_1.$$

Note. — Solution analogue de M. Bignon, de Lima.

Question 827

(voir 2e série, t. VI, p. 479);

PAR M. A. LEMAITRE,
Maître répétiteur au lycée impérial de Besançon.

Déterminer géométriquement les trajectoires orthogonales :

1° *De toutes les paraboles ayant même foyer et même axe, et dont les branches infinies sont tournées dans le même sens ;*

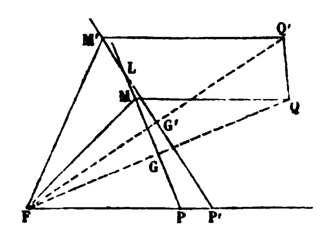
2° *De toutes les paraboles ayant même sommet et même axe.* (LAISANT.)

1° En chaque point de la courbe cherchée, la tangente normale à la parabole correspondante divise en deux parties égales l'angle d'une parallèle à une direction fixe, celle de l'axe avec le rayon vecteur allant du point de contact à un point fixe, le foyer.

Cette propriété, qui est celle de la parabole ayant pour foyer le point fixe, pour axe l'axe donné, et passant par le point considéré, conduit quand on l'exprime analytiquement à l'équation tangentielle de cette courbe.

Mais nous allons prouver géométriquement que cette propriété ne convient qu'à la parabole.

Soient F le foyer donné, FP l'axe, M et M′ deux points infiniment voisins de la courbe. Menons FM, FM′ et les



parallèles à l'axe MQ, M′Q′. Les bissectrices MP, M′P′ des angles FMQ, FM′Q′ sont les tangentes à la courbe aux points M et M′. Leur point commun est L, et P et P′ leurs intersections avec l'axe.

Remarquons qu'à cause des parallèles FP et MQ et de la bissectrice MP, les trois angles PMQ, PMF et MPF sont égaux. Par suite, le triangle FMP est isocèle.

Il en est de même du triangle FM′P′.

Menons maintenant du sommet F de ces triangles les perpendiculaires FG, FG′ sur leurs bases qu'elles partagent en deux parties égales en G et G′. Ces droites vont couper les droites MQ, M′Q′ aux points Q et Q′ symétriques du point F par rapport aux droites MP et MP′. Joignons QQ′ et comparons les deux triangles LPP′, FQQ′.

Les deux angles en L et en F sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires.

Or on a dans les triangles MGF, M′G′F

$$\frac{FG}{MG} = \frac{FQ}{MP} = \tang FMP, \quad \frac{FG'}{M'G'} = \frac{FQ'}{M'P'} = \tang FM'P'.$$

Mais à la limite, le point L, point d'intersection de deux tangentes infiniment voisines, tend vers le point de contact M. Les angles FMP, FM′P′ tendent vers l'éga-

lité, et par suite leurs tangentes. On a donc à la limite

$$\frac{FQ}{MP} = \frac{F'Q'}{M'P'},$$

et les triangles MPP′, FQQ′ tendent à être semblables à la limite, comme ayant un angle égal compris entre côtés qui tendent à être proportionnels, les deux premiers côtés d'un des triangles étant perpendiculaires aux côtés correspondants de l'autre. Il en est de même pour les troisièmes côtés. Donc QQ′ tend à être perpendiculaire à l'axe FP. Le lieu du point Q est donc tel que pour passer de sa position à la position voisine, il se meut sur une perpendiculaire à la droite AP. Son lieu géométrique est donc cette perpendiculaire.

Mais alors le point M étant également distant de QQ′ et de F, son lieu est la parabole qui a le point F comme foyer, et la droite QQ′ comme directrice.

Remarque. — Ce raisonnement suppose que MP n'est pas nul, c'est-à-dire que M n'est pas sur l'axe. Mais s'il y est, une de nos paraboles y passe, qui coupe normalement la ligne double AP, parabole limite dont la directrice passe au foyer F. De plus la droite AP répond elle-même à la question, et elle coupe les paraboles données en leurs sommets.

2° Soient S le sommet donné, SX l'axe donné, M un point du lieu, MT, MN la tangente et la normale à la parabole, et par suite la normale et la tangente à la courbe cherchée, et enfin MP l'ordonnée perpendiculaire à SX (*).

D'après une propriété connue de la parabole, on a

$$TP = 2SP.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure

La tangente de l'angle MNS, supplément de l'angle MNX $= \theta'$, est égale à la tangente de l'angle TMP qui est $\frac{TP}{MP} = \frac{2SP}{MP}$. On a donc

$$\tang\theta' = -\frac{2SP}{MP}.$$

La tangente de l'angle MSX $= \theta$ est

$$\tang\theta = \frac{MP}{SP},$$

et en faisant le produit

$$(1)\qquad \tang\theta \tang\theta' = -2.$$

Considérons une ellipse ayant pour centre le point S, pour axe l'axe Sx, et une perpendiculaire menée par S, et dont l'équation rapportée à ses axes soit

$$(2)\qquad y^2 + 2x^2 = c.$$

On pourra déterminer c de façon que l'ellipse passe par le point M, et alors elle serait tangente à la droite MN, car la relation (1) existe pour un point quelconque de cette ellipse, entre le coefficient angulaire $\tang\theta$ de son diamètre et le coefficient angulaire $\tang\theta'$ de la tangente à son extrémité.

Cette ellipse satisfait donc à la question. J'ajoute qu'une autre courbe ne peut y satisfaire.

Car, d'après ce que nous venons de voir, cette courbe au point M aurait un élément commun avec l'ellipse S dont nous avons parlé.

L'élément suivant serait commun à la courbe et à une autre ellipse aussi représentée par l'équation (2), c ayant une valeur c' différente de la première. Mais toutes les ellipses représentées par l'équation (2) sont concentriques et homothétiques, et par suite, si voisines qu'elles

soient, n'ont aucun point commun. Il faut donc ou que deux éléments consécutifs n'aient pas de point commun, ce qu'on ne comprend pas dans une courbe continue, ou que les deux éléments se trouvent sur une même ellipse; et comme il en serait de même pour l'élément suivant, et ainsi de suite, il en résulte que l'ellipse S est la seule courbe qui réponde à la question pour le point M (*).

Note. — Ont résolu la même question : MM. Édouard Besson, étudiant en droit; Napoléon Porte, élève au lycée de Grenoble.

QUESTIONS.

846. On donne deux surfaces du second degré homofocales A et B et un plan fixe P. Par une droite quelconque D du plan P, on mène des plans tangents aux deux surfaces A et B, en joignant deux à deux les points

---

(*) Le calcul donne très-simplement ces résultats. On remarquera que:

1° L'équation de toutes les paraboles ayant même axe et même foyer est

$$y^2 = 2ax + a^2,$$

en nommant a le demi-paramètre variable et en rapportant la courbe au foyer comme origine et à l'axe comme ligne des x;

2° L'équation de toutes les paraboles ayant même axe et même sommet est

$$y^2 = 2ax,$$

a désignant le demi-paramètre variable.

La méthode connue des trajectoires orthogonales donne dans le premier cas

$$y^2 = -2cx + c^2,$$

et dans le second

$$y^2 + 2x^2 = c,$$

c étant une constante arbitraire. B.



de contact qui ne se trouvent pas sur la même surface, on obtiendra quatre droites. Lorsque la droite D se déplace d'une façon quelconque dans le plan P, toutes les droites ainsi obtenues sont normales à une même surface, qui est une anallagmatique de quatrième ordre.

De quelle façon doit se déplacer la droite D dans le plan P, pour que les droites correspondantes forment une surface développable ? (LAGUERRE.)

847. Par une droite tangente à une surface quelconque en un point M, on mène différents plans sécants ; on construit pour chacune des sections que ces plans déterminent dans la surface la parabole qui suroscule la section au point m ; le lieu des foyers de ces paraboles est un centre. (LAGUERRE.)

848. Soit une courbe gauche du quatrième ordre résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré. Il existe sur une telle courbe seize points où la torsion est nulle ; si, par trois quelconques de ces points, on mène un plan, de deux choses l'une : ou ce plan passera par l'un des treize autres, ou il touchera la courbe en l'un des trois points choisis. (LAGUERRE.)

849. On donne une ellipse, trouver : 1° le lieu des milieux des cordes normales, 2° le lieu des pôles de ces normales, 3° la corde normale minimum, 4° la corde normale qui détache le plus petit segment.

(M. COLLINS, *The educational Times.*)

850. Considérons la suite des fonctions de Sturm

$$V, \quad V_1, \quad V_2 \ldots, \quad V_n;$$

si une des équations $V_r = 0$ a p racines imaginaires, la proposée a au moins p racines imaginaires. (DARBOUX.)

851. Former la suite des fonctions de Sturm pour l'équation qui donne tang $\frac{a}{n}$ quand on connaît tang a.

(Darboux.)

852. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre racines d'une équation du quatrième degré forment un quadrilatère inscriptible. Trouver la surface et le rayon de ce quadrilatère. (Darboux.)

853. Trouver la somme des séries suivantes :

1°
$$\sum \frac{\varphi(n)}{1.2.3\ldots n},$$

dans laquelle $\varphi(n)$ est un polynôme du degré p.

2°
$$\sum \frac{\varphi(n)}{f(n)},$$

où l'on a

$$f(n) = (n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p,$$

et où $\varphi(n)$ est un polynôme au plus du degré $(p-1)$.

(Darboux.)

854. Chercher les séries telles que si on met le rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

sous la forme

$$\frac{1}{1+\alpha},$$

$n\alpha$ soit constant et égal à k. Montrer qu'on peut trouver la somme des p premiers termes de ces séries. Retrouver la règle de convergence connue, ainsi qu'une limite du reste. (Darboux.)

BIBLIOGRAPHIE.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

Thèses de Mathématiques présentées à la Faculté des Sciences de Paris, le 27 novembre 1867, par M. *Gautier*, ancien élève de l'École Normale, professeur au lycée d'Alger. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire.

Première Thèse. — Mouvement d'un projectile dans l'air.

Deuxième Thèse. — Propositions d'astronomie données par la Faculté : *Théorie des inégalités séculaires du mouvement des planètes.*

Nous allons analyser la première Thèse, qui nous paraît très-intéressante.

L'auteur débute par un court aperçu historique que nous reproduisons :

« L'étude du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant date de l'origine du calcul infinitésimal. Newton et Wallis ont donné les premiers travaux sur ce sujet en 1687.

» Les recherches de Newton se trouvent dans le second livre des *Principes*, et celles de Wallis dans les *Transactions philosophiques*. Deux ans plus tard, Leibnitz publia un Mémoire sur le même sujet dans les *Acta eruditorum*.

» Jean Bernoulli fut provoqué par Keill à déterminer le mouvement d'un projectile dans un milieu homogène, lorsque la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Il résolut le problème plus général où la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse. Ses recherches furent publiées, ainsi que celles de son neveu Nicolas Bernoulli, dans

les *Acta eruditorum*, 1719, p. 216. Plus tard, Legendre ramena aux quadratures la détermination du mouvement d'un projectile quand la résistance est égale à une constante, plus un terme proportionnel au carré de la vitesse (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1782).

» On peut encore consulter sur ce problème balistique : Euler (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1753); Borda (*ibid.*, 1769); Templehoff (*ibid.*, 1788, 1789); Moreau (*Journal de l'École Polytechnique*, XIe cahier).

Ajoutons qu'une Thèse remarquable sur le même sujet a été présentée à la Faculté de Paris en 1854 par M. Sornin, ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université, alors professeur de Mathématiques spéciales au lycée impérial de Toulouse.

Dans tous ces travaux, le projectile est considéré comme un point matériel. Poisson le premier s'est occupé du mouvement dans un milieu résistant pour un corps de dimensions finies (*Journal de l'École Polytechnique*, 1838, 1839). Il s'est borné au cas où le projectile diffère très-peu d'une sphère, et où la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

M. Gautier s'est proposé de reprendre cette question pour un projectile quelconque de révolution, et en adoptant pour la résistance d'autres lois que celle que Poisson a admise.

Le tir des canons rayés donne de l'intérêt à cette étude. On a reconnu, en effet, que les projectiles animés d'une vitesse de rotation autour de leur axe de figure éprouvent une déviation latérale, qu'en termes d'artillerie ou nomme *dérivation*. Cette dérivation est assez considérable pour qu'il ait fallu en tenir compte dans le tir. Il est évident que si la résistance de l'air pouvait être représentée par une force appliquée au centre de gravité et tangente à la trajectoire de ce point, cet effet ne se produirait pas.

Voici sur quels principes M. Gautier fonde la mise en équation du problème qu'il s'est proposé de résoudre.

Quand un corps se déplace, les éléments de la surface n'agissent pas de la même manière sur l'air qui les touche. La surface doit être considérée comme partagée en deux régions :

l'une qui sort de l'espace actuellement occupé par le corps, l'autre qui pénètre dans cet espace. La ligne de séparation de ces deux régions est l'intersection de la surface du corps dans la position qu'il occupe actuellement avec cette même surface pour la position infiniment voisine que le corps prend après. Les éléments de surface appartenant à la première région compriment l'air; ils supportent donc la pression ordinaire de l'air, et en outre une résistance normale dirigée de dehors en dedans, et dont la grandeur dépend de la compression éprouvée par l'air. Les éléments de la deuxième région se trouvent en contact avec un air dilaté; ils supportent alors une pression moindre que la pression atmosphérique ordinaire. On peut dire qu'ils supportent une pression égale à la pression ordinaire diminuée d'une force normale de sens contraire, dirigée de dedans en dehors, et dont la grandeur dépend de la dilatation de l'air. Enfin, dans chaque région, les résistances élémentaires ne sont pas égales, parce que les vitesses de ces éléments n'étant pas égales, la compression ou la dilatation de l'air n'est pas la même. Cette compression ou cette dilatation ne dépendaut que de la vitesse normale de l'élément, on admet que la résistance élémentaire de l'air est proportionnelle à une certaine puissance de la vitesse normale de l'élément sur lequel il agit. On admet, en outre, qu'à égalité de vitesse normale les résistances élémentaires appliquées aux eléments des deux régions sont les mêmes.

Dans la première Partie de sa Thèse, M. Gautier suppose la résistance élémentaire proportionnelle à la vitesse normale; dans la seconde Partie, il la suppose proportionnelle au cube de la vitesse normale.

Voici quelques-uns des théorèmes les plus importants que l'auteur déduit de son analyse.

1° *Résistance proportionnelle à la vitesse.*

Théorème I. — La position moyenne de l'axe de révolution tourne autour de la verticale menée par le centre de gravité, et ce mouvement est uniformément varié. Il change de sens avec

le sens de la rotation initiale du solide, et il est d'autant plus lent que la vitesse initiale de rotation est plus grande.

Ce mouvement est analogue à la *précession*.

Théorème II. — L'axe moyen possède un second mouvement en vertu duquel il se rapproche ou s'éloigne de la verticale. Ce second mouvement est plus lent que le premier si la vitesse initiale ω de rotation autour de l'axe de révolution est grande; son sens est indépendant du signe de ω; la vitesse de ce mouvement est constante.

Théorème III. — L'axe vrai tourne autour de l'axe moyen en décrivant autour de lui un cône de révolution. Le sens de ce mouvement périodique est le même que celui de la rotation autour de l'axe de figure, et la vitesse est constante.

Ce mouvement est analogue à la *nutation*.

Théorème IV. — Il y a une dérivation; elle est une conséquence de la rotation de l'axe du projectile autour de la verticale menée par le centre de gravité. Comme cette rotation change de sens avec ω, il en est de même de la dérivation.

2° *Résistance proportionnelle au cube de la vitesse*

Théorème I. — Il y a précession, comme dans le cas précédent. Ce mouvement change de sens en même temps que la rotation ω du solide autour de son axe, et si ω est très-grand, il est très-petit..

Théorème II. — L'axe moyen possède un second mouvement en vertu duquel il se rapproche ou s'éloigne de la verticale. Le sens de ce mouvement ne dépend pas du signe de ω. Si ω est très-grand, ce mouvement est très-lent.

Théorème III. — L'axe vrai décrit un cône de révolution autour de l'axe moyen. La vitesse est constante et proportionnelle à ω; le sens du mouvement est le même que celui de ω. Ainsi la nutation est assujettie aux mêmes lois que dans le premier cas.

Théorème IV. — Il y a une dérivation résultant de la rota-

tion du solide autour de la verticale qui passe par le centre de gravité. Elle change de sens avec ω.

M. Gautier finit sa Thèse en comparant les résultats de ses calculs avec ceux de l'expérience. La seconde loi de résistance paraît être sensiblement la loi naturelle. L'accord est en général satisfaisant, et les différences peuvent s'expliquer par ceci, que la forme cylindrique du projectile adoptée par l'auteur est assez éloignée de la forme réelle, cylindro-conique.

J. Bourget.

Revue des publications étrangères.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche et fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*. Tomo I, gennaio 1868. Roma, tipografia delle scienze matematiche et fisiche, via Lata, n° 211.

Le *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des Sciences mathématiques et physiques* est un recueil périodique dont on publie chaque mois un cahier de trois feuilles au moins et de cinq au plus. Ces cahiers se vendent à Rome, dans l'Imprimerie des Sciences mathématiques et physiques (via Lata, 211), au prix de 35 centimes la feuille. Les personnes qui voudront bien envoyer des écrits destinés à être publiés dans ce recueil, sont priées de les remettre au bureau de la poste dans des plis adressés à M. B. Boncompagni.

Ceux de ces écrits qui seront rédigés en italien, en français ou en latin seront publiés textuellement dans ce Bulletin.

Le premier numéro de ce Bulletin contient un premier Mémoire de M. Timoteo Bertelli Barnabita sur *Petrus Perigrinus* de Maricourt et sur sa lettre *De Magnete*.

CORRESPONDANCE.

M. Laisant nous adresse la liste des questions non résolues dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* depuis 1863; nous nous empressons de la publier.

ANNÉE 1863.

Nos	Nos	Nos	Nos
643	662	666	673 (*)

ANNÉE 1864.

693	703	705	711 (II et III)
701			

ANNÉE 1865.

718	730	732	745
724	731	744	748
729			

ANNÉE 1866.

758	768	774	787
759	772	785	

ANNÉE 1867.

791	807	820	829
793	811	821	831
798	812	822	832
802	814	823	833
803	815	824	836
804	816	826	837
805	817	827	838
806	819	828	

(*) Résolue incomplétement.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

x et y étant deux nombres directifs (*) qui représentent deux chemins tracés sur un même plan et issus d'une même origine ou de deux origines différentes, l'équation algébrique $F(x, y) = 0$ déterminera pour chaque valeur de la variable x un nombre de valeurs de la fonction y égal au degré de la plus haute puissance de cette lettre dans la fonction $F(x, y)$. Ainsi, quand l'extrémité de la variable trace sur le plan une figure quelconque, l'extrémité de la fonction trace un certain nombre de figures correspondantes. L'équation proposée est donc propre à représenter une transformation multiple de toute figure tracée sur un plan.

La transformation sera dite algébrique si $F(x, y)$ est elle-même une fonction algébrique, et on voit ce que serait une transformation transcendante. Les points marqués par les extrémités de la variable seront des *points transformés*, et les points correspondants marqués par l'extrémité de la fonction seront des *points transformants*.

Une équation entre deux variables directives n'est donc pas, comme une équation entre deux coordonnées de Descartes ou bien de Plucker, le symbole d'une ligne déterminée; c'est celui d'une certaine corrélation entre

(*) Pour la définition et pour le calcul des *nombres directifs*, voir l'article : *Démonstration de deux théorèmes d'algèbre* (*Nouvelles Annales*, 1868).

toute ligne qu'on voudra se donner arbitrairement et d'autres lignes qui seront comme engendrées par la première au moyen de cette équation. Les théories algébriques trouveront ici comme dans tout système de géométrie analytique une interprétation, mais une interprétation sujette à moins de rectrictions que dans les systèmes pratiqués jusqu'ici, parce qu'une correspondance plus exacte sera établie entre la Géométrie et l'Algèbre. Pour en citer dès ce moment un exemple, tandis que deux courbes algébriques des ordres *m* et *n* sont dites avoir *mn* points communs, mais avec la rectriction expresse qu'on doit entendre ce résultat dans un sens purement *analytique*, vu que deux telles courbes peuvent n'avoir en effet *aucune rencontre!* Il arrive au contraire que deux transformations algébriques des ordres *m* et *n* donnent toujours lieu à *mn* points transformés qui reçoivent des deux équations correspondantes les mêmes points transformants.

Sur le plan où Descartes a construit sa Géométrie analytique, l'Algèbre peut produire à l'aise ses nombres positifs et ses nombres négatifs; mais comme toutes les places y sont marquées d'avance à l'aide des signes + et —, il n'en reste aucune pour les nombres qui ne sont ni positifs ni négatifs! Cependant la théorie du calcul directif change les dispositions de la scène et elle y fait tenir les principaux rôles précisément par ces mêmes nombres prétendus imaginaires, que l'enseignement actuel considère comme des symboles *dénués de toute signification!*

Ne pouvant pas avoir ici d'autre objet que de faire pressentir par un petit nombre d'exemples l'utilité de la nouvelle doctrine, je montrerai sommairement que la transformation du premier ordre renferme les lois de la similitude; j'exposerai ensuite quelques propriétés générales des transformations d'un ordre quelconque; et enfin

je déduirai de l'équation du second degré plusieurs relations curieuses entre certaines classes de courbes.

II.

L'équation du premier degré entre deux variables directives correspond à une transformation des figures planes par similitude. En effet, supposons d'abord que dans l'équation

$$y = b + ax$$

le coefficient a soit un nombre sans inclinaison ; y sera en grandeur et en direction le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont : 1° le chemin correspondant au nombre b ; 2° un chemin parallèle à celui que x représente, mais avec une longueur augmentée dans le rapport du nombre a à l'unité. Si au contraire a est un nombre incliné de l'angle ω sur la direction positive, il faudra faire tourner de ce même angle le côté de triangle que dans la première supposition on avait fait parallèle à x. C'est pourquoi dans le premier cas la figure transformante est homothétique à la figure transformée, au lieu que dans le second les deux figures sont encore semblables, mais non placées semblablement. Dans les deux cas la valeur $x = 0$ donnant lieu à $y = b$, il s'ensuit que le point $y = b$ est le transformant de l'origine des x ; ou en d'autres termes, ce point et l'origine sont homologues l'un de l'autre dans les deux systèmes semblables des x et des y.

Si les x et les y ont une même origine, en posant $y = x$ on trouvera le point unique qui est lui-même son transformant. Sa position est déterminée par

$$y_1 = x_1 = \frac{b}{1 - a}.$$

c'est le *centre de similitude* des deux systèmes des x et des y, et cela est vrai, que ces deux systèmes semblables soient ou non semblablement placés. Dans les systèmes homothétiques a est un nombre positif, et alors ce point est un centre de similitude *directe*; lorsque a est négatif, c'est un centre de similitude *inverse*.

Ceci entendu, le célèbre théorème relatif à la situation en ligne droite des centres de similitude de trois systèmes semblables considérées deux à deux est facile à démontrer.

Soient les deux transformations du premier degré

$$y = ax,$$
$$z = a'x + b';$$

ici le centre de similitude des x et des y a été pris pour origine; et, pour éviter toute confusion, on a représenté par z la seconde fonction transformante. Le centre de similitude des x et des z est déterminé par

$$z_1 = \frac{b'}{1 - a'};$$

et comme la relation entre les deux systèmes des y et des z est exprimée par l'équation

$$y = \frac{a}{a'}(z - b'),$$

le centre de similitude de ces deux systèmes est défini par

$$z_2 = \frac{b'}{1 - \frac{a'}{a}}.$$

Or si les coefficients a et a' sont des nombres positifs ou négatifs, c'est-à-dire sans autre inclinaison que 0 ou 180 degrés, les dénominateurs $1 - a'$ et $1 - \frac{a'}{a}$ sont eux-

mêmes des nombres positifs ou négatifs ; par conséquent les chemins qui correspondent à z_1 et z_2 et qui ont leurs points de départ à l'origine, sont placés sur une même ligne, sur la même ligne que le chemin b', mais dans le même sens ou dans des sens opposés selon les signes des dénominateurs. Donc les trois centres de similitude, celui des y et des x, celui des x et des z, celui des z et des y, sont sur une même droite. D'ailleurs, ou bien les coefficients a, a', $\frac{a}{a'}$ sont tous les trois positifs, ou bien il y en a deux négatifs et un seul positif ; c'est pourquoi les trois centres trouvés ci-dessus en ligne droite sont, ou bien trois centres de similitude directe, ou bien deux centres de similitude inverse combinés avec un centre de similitude directe. De là résulte le théorème en question.

Nota. — La transformation du premier ordre étant évidemment la seule qui transforme toute ligne droite en une autre droite, je l'appellerai à cause de cela une *transformation linéaire*. Une transformation linéaire est déterminée soit lorsqu'on donne les transformants de deux points ; ou bien lorsque avec le transformant d'un point on donne le rapport de grandeur et celui d'inclinaison de deux lignes homologues des deux systèmes semblables, double rapport exprimé par le nombre directif a qu'on appellera le *coefficient de similitude*.

III.

Soit $F(x, y) = 0$ une transformation d'ordre quelconque. On peut démontrer que la région infiniment petite autour d'un point transformant est toujours, comme dans une transformation linéaire, semblable à la région infiniment petite qui est autour du point transformé. Mais tandis que dans une transformation linéaire le coef-

ficient de similitude entre deux telles régions est constant dans toute l'étendue du plan, il varie d'un point à l'autre pour les transformations d'ordre supérieur au premier.

En effet, rappelons que, selon la théorie du calcul directif, l'accroissement dx de la variable représente en grandeur et en direction l'élément de la courbe décrite par l'extrémité de cette variable, et que dy représente à son tour l'élément correspondant de la courbe décrite par l'extrémité de la fonction ; or, si on représente la dérivée de cette fonction par $\varphi(x,y)$ qui sera un nombre directif, la relation

$$dy = \varphi(x, y)\,dx$$

fait voir que le rapport de grandeur des éléments dy et dx, aussi bien que leur inclinaison mutuelle, reçoit une valeur déterminée pour un système de valeurs correspondantes de x et y, mais change avec ces valeurs. Si on fait tourner dx autour de l'extrémité de x, dy tournera du même angle ; et si en même temps dx varie de grandeur, dy variera dans le même rapport ; de sorte qu'à un triangle infiniment petit dont deux côtés seraient formés par deux de ces valeurs de dx correspondra un triangle semblable ayant pour côtés homologues les deux valeurs correspondantes de dy. Ceci est la propriété bien connue des fonctions que M. Cauchy appelle *monogènes*, et dont le caractère est d'avoir une dérivée unique pour toute valeur déterminée (réelle ou imaginaire) de la variable.

Soient maintenant x_0 et $x_0 + \Delta x_0$ deux points transformés, y_0 et $y_0 + \Delta y_0$ leurs transformants déduits de l'équation $F(x, y) = 0$; la transformation linéaire déterminée par le système de ces deux points sera représentée par l'équation

$$(y - y_0)\,\Delta x_0 - (x - x_0)\,\Delta y_0 = 0,$$

laquelle se réduira, si le second point est infiniment voi-

sin du premier, à la suivante :

$$(y - y_0)\frac{dF}{dy_0} + (x - x_0)\frac{dF}{dx_0} = 0.$$

La similitude que cette transformation linéaire exprime dans toute l'étendue du plan est précisément celle que la relation $F(x, y) = 0$ procure entre les régions infiniment voisines des points correspondants x_0, y_0. Aux environs de ces points et à ne considérer que les infiniment petits du premier ordre les deux transformations coïncident. Donc on peut dire par analogie que dans les régions infiniment voisines des points x_0 et y_0 la transformation linéaire est *tangente* à la transformation d'ordre supérieur. Et il est assez évident, sans entrer dans aucun détail, que toutes les propriétés des courbes algébriques relativement à leurs tangentes auront ici leurs analogues.

IV.

Si dans l'équation à deux variables directives

$$F(x, y) = 0,$$

on remplace x et y par $x' + a$ et $y' + b$ respectivement, cela revient à substituer aux deux variables qui pouvaient avoir primitivement une origine commune, deux variables nouvelles ayant des origines distinctes, et notamment à prendre l'extrémité du chemin mesuré par a pour origine des x', et l'extrémité du chemin mesuré par b pour celle des y'.

Par de tels changements de l'origine, l'équation générale du second degré pourra être débarrassée de ses termes du premier dégré, si toutefois la fonction $B^2 - 4AC$ n'est pas nulle; or une telle équation donnera généralement pour y la valeur suivante :

$$y = -\frac{Bx}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 - 4AF}.$$

Si l'on pose

$$z = -\frac{Bx}{2A},$$

il viendra

$$y = z \pm \sqrt{Mz^2 + N}.$$

Ici les z auxquels on peut attribuer la même origine qu'aux y représentent une transformation linéaire des x; de sorte que la transformation générale du second degré se compose d'une première transformation par similitude, laquelle, à la vérité, serait nulle dans le cas de $B = 0$, suivie d'une seconde transformation représentée par une irrationnelle du second degré. Pour les deux valeurs de z qui annulent le radical, on a deux points à l'égard desquels la transformation du second ordre se réduit à la transformation linéaire. Ces deux valeurs

$$z_1 = +\sqrt{-\frac{N}{M}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{-\frac{N}{M}}$$

mesurent deux chemins de grandeur égale, issus tous deux de l'origine et dirigés suivant une même droite, mais en sens contraire l'un de l'autre. On peut concevoir que cette droite ait été choisie primitivement pour celle des chemins positifs et des chemins négatifs; et d'ailleurs on peut toujours, à un moment quelconque du calcul, réaliser cette supposition en augmentant d'un même angle convenablement choisi les inclinaisons de tous les paramètres de l'équation proposée. Dès lors les deux valeurs ci-dessus de z seront l'une positive que je représenterai par $+c$, et l'autre négative par $-c$; enfin je me bornerai à discuter le cas de $M = +1$; ce qui revient finalement à supposer que l'équation primitive était

$$y^2 - 2zy + c^2 = 0,$$

donnant lieu aux deux valeurs

(1) $y_1 = z + \sqrt{z^2 - c^2}, \quad y_2 = z - \sqrt{z^2 - c^2}.$

Appelons C et C′ les extrémités des deux chemins issus de l'origine et mesurés par $+c$ et $-c$; Z l'extrémité du chemin mesuré par z. D'après les principes du calcul directif, les facteurs $z - c$ et $z + c$ correspondent respectivement aux chemins CZ, C′Z; et les nombres $+\sqrt{z^2 - c^2}$, $-\sqrt{z^2 - c^2}$, mesurent deux chemins d'une même longueur qui est égale à la moyenne géométrique des distances CZ, C′Z, chemins opposés l'un à l'autre et placés sur la bissectrice de l'angle CZC′. Donc si on marque sur cette bissectrice, et de part et d'autre du point Z, deux points Y_1 et Y_2 à une distance de Z égale à cette moyenne géométrique, la valeur y_1 mesurera OY_1 mené de l'origine à celui de ces points qui est au delà de Z par rapport à la base CC′ du triangle CC′Z, et y_2 le chemin OY_2 qui va au point placé en deçà. D'ailleurs les équations (1) donnent lieu aux relations suivantes :

$$\frac{dy_1}{y_1} = + \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad \frac{dy_2}{y_2} = - \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}};$$

et comme l'égalité entre deux fractions directives entraîne que l'angle entre les deux termes de la première soit égal à l'angle entre les deux termes de la seconde, il s'ensuit que, si la courbe décrite par l'extrémité de la variable z fait un angle constant α avec la bissectrice des rayons vecteurs CZ, C′Z, les extrémités de y_1 et de y_2 parcourront des courbes faisant respectivement avec les deux rayons issus de l'origine OY_1 et OY_2 les angles constants α et $\pi - \alpha$. Or, dans la supposition qu'on vient de faire, le lieu des points Z coupe sous l'angle constant $\pi - \alpha$ toutes les ellipses ayant pour foyers communs C et C′. De là résulte la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Soient* C *et* C′ *les foyers communs d'un système d'ellipses,* S *une courbe qui traverse toutes ces ellipses sous un angle constant; si en chaque point* Z *de* S *on construit la bissectrice des rayons focaux, et que sur cette bissectrice, de part et d'autre de* Z, *on porte une longueur égale à la moyenne géométrique de ces deux rayons, les extrémités de ces longueurs auront pour lieux respectifs deux spirales logarithmiques.*

Deux cas particuliers méritent de nous arrêter. Supposons 1° que l'angle constant de la trajectoire avec les ellipses soit droit; cette trajectoire sera, comme on sait, une des hyperboles confocales aux ellipses traversées, et comme l'angle de l'élément dz avec la bissectrice sera nul, les angles de dy_1 et de dy_2 avec y_1 et y_2 respectivement seront nuls aussi, c'est-à-dire que les lieux des points Y_1 et Y_2 seront deux droites issues de l'origine : ce seront précisément les asymptotes de cette hyperbole, comme on le reconnaîtra en supposant l'extrémité de z à l'un de ses sommets; car la bissectrice des rayons focaux sera alors une perpendiculaire à l'axe transverse, et leur moyenne géométrique sera égale au demi-axe non transverse. Supposons 2° que l'angle de la trajectoire soit nul, c'est-à-dire que la trajectoire se confonde avec l'une des ellipses du système; l'angle de dz avec l'un ou l'autre des nombres directifs $+\sqrt{z^2-c^2}$ et $-\sqrt{z^2-c^2}$ sera droit, et par conséquent seront droits aussi les angles de dy_1 et de dy_2 avec y_1 et y_2 respectivement. Donc, dans ce cas, les constructions expliquées ci-dessus pour les points Y_1 et Y_2 donneront lieu à deux cercles concentriques. L'un d'eux aura pour diamètre la demi-somme et l'autre la demi-différence des axes de l'ellipse que l'on considère; car si on suppose le point Z à l'extrémité du petit axe, la moyenne géométrique dont il

faudra augmenter ou diminuer le demi petit axe pour obtenir y_1 ou y_2, sera précisément égale à la demi-longueur du grand axe.

Le premier de ces deux résultats revient à dire que, dans une hyperbole, le segment de toute tangente compris entre les deux asymptotes est égal au double de la moyenne géométrique entre les deux rayons focaux relatifs au point de contact. Le second constitue une extension de la relation qui existe dans le cercle entre une corde perpendiculaire à un diamètre et les deux segments de ce diamètre; car si on considère, parmi toutes les ellipses confocales, celle dont le petit axe est nul, cette ellipse se réduit à la droite double qui réunit les deux foyers; la bissectrice des rayons vecteurs en un point quelconque, c'est la perpendiculaire à cette droite, et les deux rayons vecteurs en sont les deux segments.

Dans ces deux cas particuliers, le théorème énoncé ci-dessus pourra être vérifié aisément par les méthodes de la Géométrie analytique ordinaire, parce que dans l'un comme dans l'autre on connaît *à priori* les trajectoires correspondantes : dans le premier cas, une hyperbole; dans le second, une ellipse.

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les ellipses confocales sont traversées sous un angle constant autre que 0 ou 90 degrés, la recherche de la trajectoire est-elle une question qui dépende de l'algèbre proprement dite?... Il ne semble pas d'abord qu'il puisse en être ainsi, puisque la solution du problème des trajectoires a été l'une des premières applications du calcul intégral. Mais dans l'équation directive $y^2 - 2zy + c^2 = 0$, dont nous discutons la signification géométrique, si nous supposons que l'extrémité de la fonction y parcourt une spirale logarithmique, nous pourrons très-aisément déterminer la courbe correspondante décrite par l'extrémité de la va-

riable z; et cela résulte de ce que toute transformation représentée par une équation $F(x, y) = 0$ jouit de la propriété très-remarquable que, *si on connaît l'équation en coordonnées ordinaires (polaires ou rectilignes) de la courbe décrite par l'extrémité de l'une des variables de cette équation directive, la détermination aussi en coordonnées ordinaires de la courbe correspondante décrite par l'extrémité de l'autre variable dépendra d'un simple calcul d'élimination.*

Supposons, en effet, que les deux courbes des x et des y soient représentées respectivement par les deux équations polaires

$$(2) \qquad \varphi(r, \varepsilon) = 0, \quad \psi(\rho, \omega) = 0,$$

on pourra remplacer, dans l'équation directive, x et y respectivement par les sommes des deux nombres perpendiculaires entre eux, savoir :

$$x \text{ par } r\cos\varepsilon + ir\sin\varepsilon,$$
$$y \text{ par } \rho\cos\omega + i\rho\sin\omega,$$

expressions dans lesquelles i est, comme à l'ordinaire, le symbole de la perpendicularité, l'équivalent de $\sqrt{-1}$. Par ces substitutions, l'équation directive $F(x, y) = 0$ prendra la forme

$$P + iQ = 0,$$

laquelle donne lieu aux deux équations distinctes

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

La combinaison de ces deux équations avec celle des équations (2) que l'on suppose connue permettra d'éliminer les coordonnées relatives à la courbe correspondante à cette équation, et fera connaître l'équation de l'autre courbe.

L'application de ce principe à l'équation

$$y^2 - 2zy + c^2 = 0$$

est facile ; car en remplaçant y par $r\cos\varepsilon + ir\sin\varepsilon$, il vient

$$z = \frac{r^2 + c^2}{2r}\cos\varepsilon + i\,\frac{r^2 - c^2}{2r}\sin\varepsilon,$$

de sorte que les deux éléments perpendiculaires de z sont les suivants :

$$\rho\cos\omega = \frac{r^2 + c^2}{2r}\cos\varepsilon, \quad \rho\sin\omega = \frac{r^2 - c^2}{2r}\sin\varepsilon.$$

Donc si la courbe des y est une spirale logarithmique, pour avoir l'équation de la courbe qui coupe sous un angle constant toutes les ellipses dont les foyers sont en $+c$ et $-c$, il faut éliminer r et ε entre les deux dernières équations et la suivante :

$$r = ae^{\frac{\varepsilon}{m}}.$$

Relativement aux transformations d'ordre supérieur et dès le second ordre, il y a à faire une remarque importante. La variable peut passer d'une valeur x_1 à une valeur x_2 par une infinité de chemins différents. A x_1 correspondront m valeurs de y qui marqueront les points de départ des chemins parcourus par les m fonctions distinctes que l'équation est supposée impliquer ; à x_2 correspondront m autres valeurs qui marqueront leurs points d'arrivée. Or, tandis qu'il y a entre x_1 et x_2 des chemins de la variable qui font toujours parvenir chacune des m fonctions de son point de départ à la même arrivée, il en est d'autres pour lesquels les m fonctions échangent entre elles leurs points d'arrivée. Les conditions et les lois de ces échanges ont été mises en lumière par M. Puiseux dans un Mémoire inséré au *Journal de M. Liouville* (année 1850).

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LE NOMBRE e

(voir p. 16);

PAR M. S. REALIS.

III.

1. Dans ce paragraphe, je me propose d'indiquer succinctement et sur des exemples usuels quelques-unes des applications très-variées et très-importantes dont les principes exposés précédemment sont susceptibles. Une courte digression, au sujet d'une question jadis proposée dans les *Nouvelles Annales* d'après le *Senate House* de Cambridge, complétera ces considérations élémentaires sur les relations d'inégalité qui se rapportent à l'exponentielle népérienne.

Reprenons la double inégalité

$$(1) \qquad 1 + x < e^x < (1 - x)^{-1}$$

démontrée dans le § I, et où il n'y a lieu de considérer que les valeurs de x pour lesquelles le premier et le troisième membre restent positifs. Des conséquences importantes peuvent d'abord se déduire de cette formule, à l'aide d'un procédé fréquemment employé, et qui consiste à combiner membre à membre, par voie de multiplication, les résultats successifs qu'on obtient en donnant à la variable une suite de valeurs assujetties à une loi déterminée.

Faisons en premier lieu

$$x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n},$$

successivement, et multiplions les résultats comme il vient d'être dit. Nous trouverons, en réduisant,

$$\frac{n+1}{2} < e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}} < n,$$

puis, en prenant les logarithmes népériens, et ajoutant ensuite l'unité à chaque membre,

$$1+\log\frac{n+1}{2} < \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < 1+\log n.$$

On obtient ainsi très-simplement deux limites entre lesquelles est comprise la somme des n premiers termes de la série harmonique.

Si l'on fait successivement dans la formule (1)

$$x=\frac{1}{m+1},\quad \frac{1}{m+2},\quad \frac{1}{m+3},\ldots,\quad \frac{1}{m+n},$$

m étant un nombre positif, et n un entier positif, on trouve de la même manière

$$\log\frac{m+n+1}{m+1} < \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots$$
$$+\frac{1}{m+n} < \log\frac{m+n}{m},$$

résultat plus général que le précédent, et qui nous montre que la série du second membre prolongée indéfiniment est divergente, puisque le premier membre croît jusqu'à l'infini avec n.

Posant

$$p=1+\frac{n}{m},\quad \text{d'où}\quad m+n=pm,$$

il vient

$$\log\frac{pm+1}{m+1} < \frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{pm} < \log p.$$

Cette double inégalité, où les trois membres se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre à mesure que l'on prend m de plus en plus grand, p restant fixe, fournit une nouvelle démonstration d'une formule due à M. Catalan, et dont la question 458 est un cas particulier (voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XVII, p. 434; t. XVIII, p. 152 et p. 197).

2. Soit maintenant une suite illimitée de termes

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_n, \ldots,$$

se succédant suivant une loi déterminée, mais compris tous entre -1 et $+1$.

Nous trouverons, au moyen de la formule (1), et en opérant comme précédemment sur les n premiers termes de la série,

$$(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) < e^{u_1+u_2+\ldots+u_n}$$
$$< \frac{1}{(1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)},$$

ce que nous écrivons sous la forme abrégée

$$U_n < e^{S_n} < \frac{1}{U_{-n}},$$

où les trois membres sont nécessairement positifs.

Ainsi :

1° Si la somme S_n tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, c'est-à-dire si la série proposée est convergente, aucun des produits U_n, U_{-n} ne tendra vers l'infini. Et si, de plus, tous les termes de la série sont positifs, on pourra affirmer avec certitude que U_n tend vers une limite positive fixe (et l'on sait qu'il en sera de même de U_{-n}; mais cela ne résulte pas de la formule ci-dessus).

2° Si la somme S_n croît au delà de toute limite pour n suffisamment grand, le produit U_{-n} tend vers zéro. En ce cas, si tous les termes de la série sont positifs, le produit U_n tend vers l'infini (puisque alors $U_n > S_n$).

3° Si l'un des produits U_n, U_{-n} augmente indéfiniment en même temps que n, la série considérée est divergente.

3. La formule (1) conduit par le même procédé à la détermination des limites supérieures et inférieures de la valeur des factorielles. On nomme factorielle, comme on sait, le produit d'une suite de nombres en progression par différence; mais nous ne considérerons ici que la progression des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5,.... Lorsque le nombre des termes à multiplier est très-considérable, le calcul direct d'une factorielle est à peu près impraticable; mais il suffit souvent de connaître des limites plus ou moins rapprochées entre lesquelles le produit en question se trouve compris. C'est à ce point de vue que les résultats qui vont suivre pourront être quelquefois utiles.

Désignant par p et $n > p$ deux entiers positifs de même parité, posons la formule

$$1-\left(\frac{2a}{n+p}\right)^2 < e^{-\left(\frac{2a}{n+p}\right)^2};$$

faisons-y successivement

$$a = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots,\quad \frac{n-p-2}{2},\quad \frac{n-p}{2},$$

et multiplions les résultats membre à membre. Il s'ensuivra une égalité de la forme

$$A < e^{-B},$$

où

$$A = \frac{\left\{\begin{array}{l}\left[p(p+1)(p+2)\ldots\dfrac{n+p-4}{2}\,\dfrac{n+p-2}{2}\right]\\ \times\left[\dfrac{n+p+2}{2}\,\dfrac{n+p+4}{2}\ldots(n-2)(n-1)n\right]\end{array}\right\}}{\left(\dfrac{n+p}{2}\right)^{n-p}},$$

$$B = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + \left(\dfrac{n-p}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{n+p}{2}\right)^2}.$$

De cette inégalité, en la multipliant par $\left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p+1}$, et faisant la somme des carrés qui figurent au numérateur de B, on tire la formule

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} p(p+1)(p+2)\ldots\dfrac{n+p-2}{2}\,\dfrac{n+p}{2}\,\dfrac{n+p+2}{2}\ldots(n-2)(n-1)n \\ < \left(\dfrac{n+p}{2}\right)^{n-p+1} e^{-\frac{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)}{6(n+p)^2}}, \end{array}\right.$$

qui nous fournit une limite supérieure du produit des $n-p+1$ nombres entiers consécutifs à partir de p.

Il vient, pour $p=1$,

$$1.2.3\ldots(n-1)n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n e^{-\frac{(n-1)n}{6(n+1)}},$$

et l'on a ainsi une limite supérieure du produit des n premiers nombres entiers; mais on trouve une expression plus avantageuse en multipliant la formule (2) par le produit $1.2.3\ldots(p-2)(p-1)$ supposé connu. L'inégalité résultante, savoir

$$1.2.3\ldots(n-1)n < 1.2.3\ldots(p-1)\left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p+1} e^{-\frac{(n-p)(n-p+1)(n-p+2)}{6(n+p)^2}},$$

fournit une limite qui sera d'autant moins éloignée de la valeur exacte du premier membre, pour une valeur donnée de n, que la différence $n - p$ sera plus petite. Cela tient à ce que, dans la formule (1), les expressions séparées par les signes d'inégalité sont d'autant moins différentes l'une de l'autre, que la valeur numérique de x est plus petite.

On obtient des résultats ne contenant plus le nombre incommensurable e (mais où la limite se trouvera plus éloignée), en modifiant la formule (2) à l'aide de la relation

$$e^{-B} < (1 + B)^{-1},$$

ou, plus simplement, à l'aide de la relation

$$e^{-B} < 1.$$

C'est ainsi qu'on trouve immédiatement

$$p(p+1)(p+2)\ldots(n-1)\,n < \left(\frac{n+p}{2}\right)^{n-p+1},$$

ce qui s'accorde avec un théorème donné par Cauchy, et que nous rapporterons ci-dessous (n° 6). Cette dernière formule, du reste, peut s'obtenir directement en opérant comme plus haut sur l'inégalité évidente

$$1 - \left(\frac{2a}{n+p}\right)^2 < 1,$$

sans passer par la considération de la base népérienne.

4. La formule (1) se prête avec moins d'avantage à la détermination de limites inférieures de la valeur des factorielles; mais nous bornant au cas du produit des n premiers nombres entiers, nous allons traiter la question à l'aide d'inégalités autres que (1), mais se rapportant également à la fonction exponentielle.

D'après l'énoncé de la question 292 (*voir* t. XIII, p. 192), n étant un nombre positif entier, on a

$$(3)\qquad e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n}.$$

On tire de là

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n,$$

ce qui nous fournit déjà une limite inférieure très-simple du produit des n premiers nombres entiers. Mais il est facile de parvenir à des limites beaucoup plus élevées.

Remarquons d'abord que la formule (3) devient évidente par la comparaison, terme à terme, du développement fini

$$(1+n)^n = 1 + \frac{n}{1}n + \frac{n(n-1)}{1.2}n^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(n-k)}n^{n-k} + \ldots + n^n,$$

ou

$$\frac{(1+n)^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{n}{1} + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)}\frac{n^2}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)k}\frac{n^{n-k}}{1.2.3\ldots(n-k)} + \ldots + \frac{n^n}{1.2.3\ldots n},$$

avec le développement

$$e^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1.2} + \ldots + \frac{n^{n-k}}{1.2.3\ldots(n-k)} + \ldots + \frac{n^n}{1.2.3\ldots n} + \mathrm{R},$$

où R est un nombre fini positif. Cette démonstration revient à celle qui a été donnée t. XIV, p. 132 (par MM. Paque et Devylder, professeurs); mais nous allons tirer parti du reste R pour étendre l'énoncé de la question 292, ce qui n'avait pas été fait dans la solution citée.

L'extension annoncée se présente d'elle-même, car la comparaison des développements qui précèdent établit directement et d'une manière générale la relation

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n} + \mathrm{R}$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. On a par là le moyen d'élever rapidement la limite inférieure de e^n fournie par la formule (3), en y ajoutant des quantités moindres que R, mais d'autant plus considérables que n est plus grand.

Remplaçons le reste R par la série convergente qu'il représente, savoir :

$$\frac{n^n}{1.2.3\ldots n}\left[\frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right],$$

où l'on posera, pour abréger,

$$u_k = \frac{n^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}.$$

Ne prenons d'abord que les deux premiers termes de cette série; nous aurons, à cause de $u_1 + u_2 = \frac{2n}{n+2}$,

$$e^n > \frac{(n+1)^n + \frac{2n^{n+1}}{n+2}}{1.2.3\ldots n},$$

et aussi, si n n'est pas inférieur à 2,

$$e^n > \frac{(n+1)^n + n^n}{1.2.3\ldots n},$$

formule où la différence entre les deux membres est déjà bien moins considérable que dans la relation (3).

Prenons maintenant trois termes de R, il viendra

$$e^n > \frac{(n+1)^n + (u_1 + u_2 + u_3)\, n^n}{1.2.3\ldots n},$$

et, si $n > 6$,

$$e^n > \frac{(n+1)^n + 2n^n}{1.2.3\ldots n}.$$

La condition $n > 6$ s'obtient en résolvant en nombres entiers l'inégalité

$$u_1 + u_2 + u_3 > 2;$$

mais il est facile de s'assurer que la formule qu'on vient d'écrire subsiste à partir de $n = 3$.

Les quatre premiers termes de R donnent de la même manière

$$e^n > \frac{(n+1)^n + 3n^n}{1.2.3\ldots n},$$

et $n > 15$; mais il suffit que l'on ait $n > 4$.

On voit par là qu'en tenant compte des $k+1$ premiers termes de R, on peut poser, en général,

(4) $$e^n > \frac{(n+1)^n + kn^n}{1\ 2\ldots n},$$

pourvu que n ne soit pas au-dessous d'une certaine valeur dépendant de k, et dont la limite supérieure est donnée par le plus petit nombre entier vérifiant l'inégalité

(5) $$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{k+1} > k.$$

De la formule (4) on tire la suivante :

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n + k\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

servant au calcul approché (par défaut) du produit considéré. Et en combinant celle-ci avec l'inégalité

$$e^{-n} > \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{n}{x}},$$

qui se déduit d'une relation énoncée au n° 3 du § I, et où l'on peut attribuer à x une valeur arbitraire, mais comprise entre zéro et 2, on obtiendrait au besoin des résultats débarrassés de la transcendante e.

5. Il serait intéressant de pouvoir assigner d'avance la plus grande valeur de k correspondant à une valeur donnée de n, et, réciproquement, la plus petite valeur de n à partir de laquelle la formule (4) se trouve vérifiée, k étant donné. Mais cette question, dont la solution complète fournirait immédiatement deux limites assez rapprochées, comprenant entre elles le produit que nous considérons, semble présenter de grandes difficultés, et il suffit ici de l'avoir signalée.

Mais s'il n'est pas possible de déterminer d'avance la relation qui lie de la manière la plus avantageuse les entiers n et k, il est facile néanmoins d'établir des limites de différence entre ces nombres, en dehors desquelles la formule (4) soit applicable.

Soit donnée une valeur de k assez grande pour qu'il faille renoncer à faire usage de l'inégalité (5) pour calculer une limite supérieure de n. Nous pourrons toujours considérer, au lieu de (5), l'inégalité

$$(k+1)n^{k+1} > k(n+k+1)^{k+1},$$

car si celle-ci est satisfaite, (5) le sera à plus forte raison. D'où il suit qu'en prenant

$$n > \frac{k+1}{\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} - 1},$$

on sera assuré d'avoir des nombres supérieurs à la valeur minimum de n qui vérifie la formule (4).

Il ne serait pas difficile d'abaisser plus ou moins cette limite supérieure de n, en partant des relations qui s'écartent moins que celle qu'on vient d'écrire de l'inégalité (5). On pourrait aussi, par des considérations analogues aux précédentes, poser une inégalité de la forme

$$1.2.3\ldots n > h\left(\frac{n+1}{e}\right)^n,$$

qui se prête mieux au calcul par logarithmes, ou de la forme

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n + k\left(\frac{n}{e}\right)^n + k'e\left(\frac{n}{e}\right)^{n-1} + k''e^2\left(\frac{n}{e}\right)^{n-2} + \ldots,$$

propre à donner une plus grande approximation. Mais la difficulté d'obtenir des valeurs convenables de h, k, k', k'', ..., lorsque n est un grand nombre, ne laisse guère espérer que l'on puisse arriver par cette voie à des résultats d'une application avantageuse.

Ajoutons qu'il y aurait peu d'utilité à s'engager dans des recherches minutieuses sur ce sujet, l'évaluation du produit en question pouvant toujours s'effectuer commodément à l'aide de la formule de Stirling. Cette formule remarquable, et sur laquelle d'illustres géomètres se sont exercés, sert à calculer la somme des logarithmes de

n nombres en progression par différence. On la trouve rapportée (pour ne citer ici qu'une source qui est à la disposition de tous) dans le *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de Lacroix, et dans les Notes ajoutées par M. Serret à la sixième édition de cet ouvrage.

6. Je ne quitterai point ce sujet des limites des factorielles sans rappeler le théorème et le corollaire suivants, tirés des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. IV, p. 206 :

Théorème. — *Le produit des n termes de la progression arithmétique*

$$a, \quad a+b, \quad a+2b, \ldots, \quad a+(n-1)b,$$

supposés tous positifs, est compris entre les limites inférieure et supérieure

$$a^{\frac{n}{2}}[a+(n-1)b]^{\frac{n}{2}}, \quad \left(a+\frac{n-1}{2}b\right)^n.$$

Corollaire. — Si l'on suppose a et b réduits à l'unité, on conclura de ce théorème que le produit $1.2.3\ldots n$ est compris entre les limites inférieure et supérieure

$$n^{\frac{n}{2}}, \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

7. Je crois utile, en terminant, de donner un exemple de l'application de la formule (1) à l'évaluation de certaines intégrales définies.

La relation

$$e^{-x^2} < \left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-m},$$

ou bien

$$e^{-x^2} < \frac{m^m}{(m+x^2)^m},$$

subsistant pour toutes les valeurs positives de m, et les deux expressions séparées par le signe d'inégalité étant constamment positives pour toutes les valeurs réelles de x, on est d'abord en droit d'en conclure

$$(6) \qquad \int_\alpha^\beta e^{-x^2}dx < m^m \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(m+x^2)^m},$$

où nous supposerons $\alpha^2 < \beta^2 < m$ et β positif.

On sait d'ailleurs que, pour tout nombre entier m plus grand que l'unité, on a

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(m+x^2)^m} = \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)} \cdot \frac{\pi}{2m^{m-\frac{1}{2}}}.$$

Dans notre cas, m doit être $> x^2$, et devient conséquemment infini avec x; par suite, eu égard à la formule de Wallis,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{2.4.6\ldots(2m-2)}{1.3.5\ldots(2m-3)} \cdot \frac{\sqrt{2m}}{2m-1} \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

d'où

$$\frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots(2m-2)} = \frac{2\sqrt{m}}{(2m-1)\sqrt{\pi}} \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

nous poserons, pour $m = \infty$,

$$m^m \int_0^\infty \frac{dx}{(m+x^2)^m} = \frac{2\sqrt{m}}{(2m-1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi\sqrt{m}}{2} = \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ou, par cela même que $m = \infty$,

$$m^m \int_0^\infty \frac{dx}{(m+x^2)^m} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Maintenant, rien ne s'oppose à ce que l'on considère,

dans la formule (6), m comme infiniment grand à l'égard de β^2, tout en prenant $\alpha = 0$ et $\beta = \infty$ pour limites des intégrales; alors cette même formule se transforme en une relation d'égalité, et nous fournit de suite le résultat connu

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

J'ai choisi cet exemple à cause de sa simplicité et de l'importance du résultat; mais il est visible que le procédé employé peut conduire d'une manière analogue à la détermination d'autres intégrales définies non moins remarquables.

SUR LE RAYON DE COURBURE DES CONIQUES;

PAR M. A. RIBAUCOUR.

On a souvent besoin de construire le rayon de courbure d'une conique définie par certaines conditions, soit, par exemple, que l'on veuille trouver le point de contact d'un rayon lumineux réfléchi avec son enveloppe; soit que l'on veuille construire le rayon de courbure d'une polaire; soit enfin dans toute autre question où il est commode de remplacer la courbe par une conique osculatrice.

Dans le cours de l'École Polytechnique, on a l'occasion de construire une surface du second degré osculatrice à une surface de révolution tout le long d'un parallèle; les élèves sont censés connaître la construction du rayon de courbure d'une conique; il ne sera donc pas inutile d'appeler un moment l'attention sur ce point.

Toutes les constructions connues peuvent se déduire de la proposition suivante :

Soit A un point d'une conique (A), M un point de la tangente en A à (A); soient P et D les points d'intersection de la normale en A à (A) avec les perpendiculaires abaissées du point M sur la polaire de ce point M et sur le diamètre de la conique aboutissant en A.

Quelle que soit la position du point M *sur la tangente en* A *à* (A), *le segment* PD *est constant; ce segment est égal au rayon de courbure de* (A) *en* A.

Je substituerai à la démonstration que j'ai trouvée de cette proposition, celle que m'en a donnée un géomètre bien connu.

Désignons par x la distance MA, et par ω l'angle de la polaire de M avec la normale en A. A une valeur de x correspond une et une seule valeur de ω, et réciproquement; donc x est liée à ω par une relation de la forme

$$x.\text{tang}\,\omega - Ax + B.\text{tang}\,\omega = C,$$

où A, B et C sont des constantes.

Désignons par δ l'angle de la normale en A et du diamètre aboutissant en ce point; faisons x infinie; dans l'équation précédente ω est égal à δ. Donc

$$A = \text{tang}\,\delta;$$

pour $\omega = 90^\circ$, on a

$$x = 0, \quad B = 0.$$

On voit donc que l'on a définitivement

$$x(\text{tang}\,\omega - \text{tang}\,\delta) = C.$$

Or, le premier membre a pour valeur l'expression du segment PD; on voit donc que, quelle que soit la position de M sur la tangente en A, le segment PM est

constant; si maintenant on suppose que M soit à une distance infiniment petite du premier ordre de A, la perpendiculaire à la polaire peut être considérée comme normale à la conique; donc la limite du point d'intersection de cette droite et de la normale en A est le centre de courbure de (A) en A.

La proposition énoncée résulte immédiatement de ce qui précède. Passons aux applications.

Supposons d'abord que le point M soit tellement choisi, qu'il ait pour polaire la normale en A à (A), désignant par R le rayon de courbure en A,

$$-x.\operatorname{tang}\delta = \mathrm{R}.$$

Abaissons du centre O de (A) la perpendiculaire ON sur la tangente en A, on a

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{ON}}:$$

il en résulte

$$\frac{\mathrm{AM.AN}}{\mathrm{ON}} = \mathrm{R};$$

mais les deux droites OM et ON sont deux diamètres conjugués de (A); si donc on désigne par b le demi-diamètre de cette courbe parallèle à la tangente en A, d'après une proposition bien connue,

$$\mathrm{AM.AN} = b^2;$$

on voit donc que

$$\mathrm{R} = \frac{b^2}{\mathrm{ON}},$$

ce qui est la formule de M. Charles Dupin.

Si (A) est une parabole et si l'on prend M sur la directrice de celle-ci, la perpendiculaire MD est la directrice, la droite MP passe par le foyer; d'ailleurs il est évident

que AP et AD sont deux segments égaux; on a donc cette proposition connue :

Si par le foyer F *d'une parabole* (A) *on élève une perpendiculaire au rayon* FA, *et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en* P *avec la normale en* A *à* (A), *le segment* AP *est la moitié du rayon de courbure en* A.

J'ai fait voir que l'on a

$$R = AP - AD;$$

mais comme on a

$$AP = AM . \tang \omega,$$

$$AD = AM . \tang \delta,$$

il en résulte

$$AD = \tang \delta . \cot \omega . AP.$$

Par le point P, élevons une perpendiculaire à la normale en A à (A) et prolongeons-la jusqu'à la rencontre en B avec le diamètre OA; puis par B, menons la droite BC parallèle à la polaire du point M, si C est le point d'intersection de cette droite avec la normale en A; il est visible que

$$PC = AP . \tang \delta . \cot \omega ;$$

donc on a

$$R = AP - PC,$$

c'est-à-dire que le point C est le centre de courbure relatif au point A.

Supposons que le point M soit sur un des axes de la conique, MP coïncide avec cet axe; donc

Par le point P *où la normale en* A *à* (A) *rencontre un axe, on élève une perpendiculaire* PB *à cette normale; par le point* C *où* PB *rencontre le diamètre* OA, *on mène la perpendiculaire à l'axe : cette droite passe par le centre de courbure relatif au point* A.

Cette construction est celle donnée par M. Mannheim dans son Cours à l'École Polytechnique.

En prenant successivement le point M sur chacune des directrices de la conique, désignant par ρ et ρ' les distances du point A aux foyers F et F', par i l'angle d'un de ces rayons vecteurs avec la normale en A, on voit de suite que

$$\frac{2}{R\cos i} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1},$$

ce qui est la formule du marquis de l'Hospital, plus souvent appelée *formule de Petit*.

La comparaison des constructions effectuées, en supposant successivement le point M sur le grand axe et sur une directrice, conduit à la construction la plus connue.

Désignons par i l'angle de la normale en A et du rayon vecteur FA, par α l'angle de la normale en A et du grand axe, par P le point de rencontre de ces deux dernières droites; on a, d'après ce qui précède,

$$R = AP\,(1 + \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha),$$
$$R = \frac{AF}{\cos i}(1 + \operatorname{tang}\delta . \cot i).$$

Dès lors, si l'on remarque que

$$\frac{AP}{\sin(\alpha + i)} = \frac{AF}{\sin\alpha},$$

on a l'équation de condition

$$\operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos i} - \sin(\alpha + i)}{\sin(\alpha + i) - \dfrac{\cos\alpha}{\sin i}}.$$

Il en résulte immédiatement

$$1 + \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\cos^2 i};$$



per conséquent, on a aussi

$$R = \frac{AP}{\cos^2 i},$$

ce qui est la formule que l'on donne habituellement pour le rayon de courbure des coniques.

On en déduit immédiatement la construction ordinaire du centre de courbure.

NOTE SUR LES COURBES CONSIDÉRÉES COMME ENVELOPPES D'UNE DROITE;

PAR M. LÉON DYRION.

α étant un paramètre variable, la droite représentée par l'équation

$$(1) \qquad x \cos\alpha + y \sin\alpha - \varphi(\alpha) = 0$$

enveloppe une courbe C; je vais exposer une manière simple de déterminer le rayon de courbure en chaque point de cette courbe.

On sait, par la méthode générale des courbes enveloppes, que le point générateur de la courbe C est l'intersection de la droite (1) par une autre droite dont l'équation est

$$(2) \qquad -x \sin\alpha + y \cos\alpha - \varphi'(\alpha) = 0.$$

Or cette seconde droite est perpendiculaire sur la première et, par suite, est la normale de la courbe C;

La droite (2) enveloppe à son tour une courbe C' qui est la développée de C; et la normale de cette développée est représentée par l'équation

$$(3) \qquad -x \cos\alpha - y \sin\alpha - \varphi''(\alpha) = 0,$$

et, comme on le sait d'avance, cette normale est parallèle à la tangente correspondante de la courbe C.

Cela posé, la distance normale entre les droites (1) et (3) mesure évidemment le rayon de courbure de la courbe C au point où cette courbe touche la droite (1); donc ce rayon de courbure a pour mesure

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha).$$

Ainsi donc : *En chaque point* (α) *de la courbe qu'enveloppe la droite mobile*

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \varphi(\alpha) = 0,$$

le rayon de courbure est exprimé par

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha).$$

On en conclut immédiatement que l'expression

$$\varphi'(\alpha) + \varphi'''(\alpha)$$

mesure le rayon de courbure de la développée C; et ainsi de suite.

Remarquons, en second lieu, que les expressions

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - \varphi(\alpha), \quad - x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha - \varphi'(\alpha)$$

mesurent les distances d'un même point (x_1, y_1) à la tangente et à la normale de la courbe C; donc

La distance d'un point quelconque à la normale de la courbe C *est la dérivée par rapport à* α *de la distance du même point à la tangente de la même courbe.*

En troisième lieu, le rayon de courbure

$$R = \varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha)$$

est, à une constante près, la longueur de l'arc de la courbe C'; or cette expression de R peut être considérée,

à une constante près, comme la quantité

$$\int \varphi'(\alpha) \, . \, d\alpha + \frac{d \, . \, \varphi'(\alpha)}{d\alpha},$$

ce qui nous conduit à la règle suivante :

Pour rectifier un arc de courbe, exprimez en fonction de α la distance de la tangente à un point quelconque ; intégrez, puis différentiez par rapport à α ; et faites la somme, en choisissant convenablement les limites de l'intégrale.

Nous allons montrer comment les trois propositions que nous venons de démontrer font retrouver simplement certaines propriétés déjà connues :

1° La distance de l'origine à la droite (1) est donnée par la formule

$$OP = \varphi(\alpha),$$

et la distance de la même origine à la droite (2) est

$$OP' = \varphi'(\alpha).$$

Or, d'après les formules connues, cela nous apprend que OP' est la sous-normale, en coordonnées polaires, du lieu du point P ; d'où nous concluons ce théorème connu (Bertrand, *Calcul différentiel*) : *La normale en chaque point de la podaire d'une courbe* C *passe par la projection du pôle sur la normale de la courbe* C ; de là nous concluons en particulier : *Si l'on projette un foyer d'une conique sur la tangente et sur la normale d'un même point de la courbe, la droite qui joint les deux projections passe par le centre de la conique.*

2° Dans le cas où la courbe C est une cycloïde, et où l'origine O est un des points de rebroussement, on trouve facilement

$$OP = \varphi(\alpha) = 2a \, . \sin\alpha - 2a\alpha\cos\alpha,$$

en désignant par a le rayon du cercle générateur; et l'on en conclut

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) = 4a \, . \sin \alpha,$$

ce qui exprime le théorème connu sur le rayon de courbure de la cycloïde.

3° S'il s'agit de la lemniscate représentée par l'équation

$$\rho^2 = a^2 . \cos 2\omega,$$

on trouve facilement que

$$\alpha = 3\omega,$$

que par suite

$$\varphi(\alpha) = a . \left(\cos \frac{2\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{2}};$$

d'où

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) = \frac{a^2}{3\rho}.$$

4° Si une droite de longueur constante se meut dans un angle droit, son équation est

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - l \cos \alpha . \sin \alpha = 0,$$

et par conséquent

$$\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha) = 3 . \varphi(\alpha)$$

est le triple de la distance du sommet de l'angle droit à la ligne mobile. Si l'on formait l'équation de la normale

$$- x \sin \alpha + y \cos \alpha - \varphi'(\alpha) = 0,$$

on pourrait dans ce cas l'écrire

$$-(x - l \sin \alpha) \sin \alpha + (y - l \cos \alpha) \cos \alpha = 0,$$

ce qui permettrait de vérifier le théorème connu relatif au centre instantané de rotation.

Nous allons maintenant indiquer quelques autres conséquences de notre procédé général :

1° Si la droite mobile est représentée par

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = A . \alpha^m,$$

et plus généralement si $\varphi(\alpha)$ est une fonction entière et d'ordre m de α, la dérivée du $m^{ième}$ ordre $\varphi^m(\alpha)$ sera une simple constante ; et par conséquent la droite mobile enveloppera la $m^{ième}$ développante d'un cercle ;

2° Si $\varphi(\alpha) = A . e^{\alpha}$, toutes les dérivées successives de $\varphi(\alpha)$ seront égales, et par conséquent le rayon de courbure de la courbe enveloppe aura la même longueur que celui d'une quelconque de ses développées successives. On trouvera d'ailleurs facilement que cette courbe enveloppe est représentée en coordonnées cartésiennes par

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 + y^2} = A . e^{\alpha}, \quad \alpha = \text{arc tang}\, \frac{y - x}{y + x},$$

ce qui donne

$$\left(\text{en posant : arc tang}\, \frac{y}{x} = \omega, \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho\right)$$

$$\rho = A\sqrt{2} . e^{\omega + \frac{\pi}{4}}.$$

Cette courbe est donc la spirale logarithmique.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 745 *et* 814

(voir 2e série, t. IV, p. 430 et t. VI, p. 288);

PAR M. G.-B. MAFFIOTTI,
Étudiant à l'Université de Turin.

745. *D'un point pris dans le plan d'une courbe géométrique, on mène toutes les tangentes à cette courbe; on divise le rayon de courbure relatif à chaque point de contact par le cube de la distance de ce point au point fixe d'où émanent les tangentes: la somme des quotients ainsi obtenue est nulle.* (MANNHEIM.)

Soient

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, et (x_0, y_0) le point fixe; (x_i, y_i) un point de contact quelconque des tangentes menées du premier point à la courbe, et d_i la distance des deux points (x_0, y_0), (x_i, y_i). On aura

$$\frac{x_i - x_0}{\frac{d\varphi}{dy_i}} = -\frac{y_i - y_0}{\frac{d\varphi}{dx_i}} = k,$$

d'où

$$d_i = k\left[\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le rayon de courbure de la courbe donnée, exprimé en

fonction des dérivées partielles de la fonction φ, est

$$\frac{\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}.$$

Tout revient donc à démontrer qu'on a

$$\sum \frac{1}{k^3\left[\frac{d^2\varphi}{dx_i^2}\left(\frac{d\varphi}{dy_i}\right)^2 - 2\frac{d^2\varphi}{dx_i\,dy_i}\frac{d\varphi}{dx_i}\frac{d\varphi}{dy_i} + \frac{d^2\varphi}{dy_i^2}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)^2\right]} = 0,$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de x et y qui sont racines communes aux équations

$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$F(x, y) = (x - x_0)\frac{d\varphi}{dx} + (y - y_0)\frac{d\varphi}{dy} = 0;$$

or il est aisé de vérifier qu'on a

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{dF}{dy}$$
$$= k\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right].$$

L'identité à démontrer devient donc, en remplaçant k par une des valeurs que donne l'équation (1),

$$(1) \qquad \sum \frac{\left(\frac{\frac{d\varphi}{dy_i}}{x_0 - x_i}\right)^2}{\frac{d\varphi}{dx_i}\frac{dF}{dy_i} - \frac{d\varphi}{dy_i}\frac{dF}{dx_i}} = 0.$$

Soit m le degré de φ : le degré de F sera $m - 1$, et la somme des degrés de ces deux fonctions sera $2m - 1$; le degré de

$$\left(\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{x_0 - x}\right)^2$$

est $2m - 4$, c'est-à-dire inférieur de plus de deux unités à la somme des degrés de φ et de F; donc, d'après un théorème d'analyse, la somme qui forme le premier membre de l'équation (1) est nulle.

814. *Étant donnée une surface* S *du second ordre à centre, si l'on imagine une surface de révolution du second ordre ayant un de ses foyers au centre de la surface* S *et touchant les quatre faces d'un quelconque des tétraèdres conjugués par rapport à la surface* S, *la longueur de l'axe équatorial de la surface de révolution conserve une valeur constante, quel que soit le tétraèdre considéré. On suppose la surface de révolution autour de l'axe qui passe par le centre de la surface* S.

(L. PAINVIN.)

Cette proposition se déduit simplement du théorème qui suit :

Si

$$E_{00}u^2 + 2E_{01}uv + E_{11}v^2 + \ldots = 0$$

est l'équation d'une surface du second degré en coordonnées tangentielles, et si

$$a_{00}x^2 + 2a_{01}xy + a_{11}y^2 + \ldots = 0$$

est l'équation d'une autre surface du même degré en coordonnées rectilignes, l'équation de condition pour que la première surface touche les faces d'un tétraèdre quelconque conjugué à la première est

$$a_{00}E_{00} + 2a_{01}E_{01} + a_{11}E_{11} + \ldots = 0.$$

(*Voir* O. HESSE, *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, etc., p. 174.)

Soit

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 - 1 = 0$$

l'équation de la surface S rapportée à ses axes. Quant à la surface de révolution, j'observe que si

$$A = \alpha u + \beta v + \gamma w + 1 = 0,$$
$$A' = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w + 1 = 0$$

sont les équations des deux foyers en coordonnées tangentielles, l'équation

$$k = \frac{A.A'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

sera l'équation de la surface, puisqu'elle exprime que le produit des perpendiculaires abaissées des foyers sur un plan tangent est constant. La constante k est le carré du demi-axe équatorial.

Si l'un des foyers est à l'origine, l'équation devient, en chassant les dénominateurs,

$$k(u^2+v^2+w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w + 1) = 0,$$

et l'équation de condition pour que cette surface touche un tétraèdre quelconque conjugué de S est ici

$$k(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + 1 = 0, \quad k = \frac{-1}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2};$$

donc k est constant.

Je remarquerai en passant que le théorème de O. Hesse, que je viens de citer, aurait fourni une démonstration plus simple des questions 760, 761 (*voir* t. VI, p. 219), car il donne immédiatement les relations

$$R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) = \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2} - 1,$$

$$R^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \frac{y_0^2}{p}+\frac{z_0^2}{q} - 2x_0,$$

qui démontrent les théorèmes de M. Painvin.

Question 842

(voir p. 44).

HEXAGRAMME DE PASCAL (RÉCIPROQUE). — *Si trois angles ont leurs sommets en ligne droite, leurs côtés sont les côtés opposés d'un hexagone inscriptible dans une conique.* (J.-E. BARBIER.)

Cette question a été résolue par MM. André (Raoul), du lycée Louis-le-Grand; Lavollée, du même lycée; Lipmann, du lycée Napoléon; Drouot et Aldacotche, étudiants à Metz; Léon Bédorez, Jules Millet et Paul Endrès, du lycée de Douai; Willière, professeur à Arlon (Belgique); Tuffraud, de Sainte-Barbe.

Dans presque tous les cours de géométrie analytique, les professeurs indiquent le moyen de construire une conique dont on connaît cinq points, et démontrent ainsi indirectement la réciproque de l'Hexagramme de Pascal; la description organique des coniques par *Newton*, le procédé de *Maclaurin* et de *Braikenridge*, démontrent aussi cette proposition réciproque.

MM. *Léon Bédorez* et *Paul Endrès* font voir, dans la solution qu'ils nous adressent, que la question proposée se ramène au théorème de Maclaurin.

M. Lavollée remarque que le théorème de Pascal se déduit de cette proposition : Si trois coniques ont une corde commune, deux autres cordes communes aux coniques prises deux à deux vont se couper sur la première corde commune; et il se trouve conduit à déduire la réciproque de l'Hexagramme de la proposition suivante : Si l'on a trois droites issues d'un même point et deux sections coniques ayant pour corde commune une de ces deux droites, les deux autres points d'intersection et les quatre points de rencontre des deux coniques par les

deux autres droites sont six points situés sur une même conique.

Enfin M. Tuffraud se sert élégamment de la considération des projections coniques :

Supposons, dit-il, que les trois angles A, B, C qui forment l'hexagone abc, $a'b'c'$ soient dans un plan P (a et a' désignent les sommets de l'hexagone qui proviennent de l'intersection d'un côté de l'angle B par un côté de l'angle C, etc.). Menons par la droite BC un plan quelconque, et dans ce plan trois droites BS, AS, CS qui forment entre elles des angles de 60 degrés. Si l'on considère alors un plan Q mené n'importe où, mais parallèle au plan BSC, les projections coniques, sur ce plan Q et par rapport au point S, des droites concourantes, Bc, Bc', seront deux droites parallèles entre elles et à BS. De même, les projections coniques des droites Ab et Ab' seront deux parallèles à AS, et celles des droites Ca, Ca' deux parallèles à CS. Alors la projection conique de la figure abc, $a'b'c'$ sur le plan Q sera un hexagone dont les côtés opposés seront parallèles et formeront des angles de 60 degrés : ce sera un hexagone régulier. Le cône ayant pour sommet le point S, et pour directrice le cercle circonscrit à cet hexagone, coupera le plan P suivant une conique passant par les points abc, $a'b'c'$. B.

Même question;

PAR M. BARBIER.

Les équations des six côtés peuvent s'écrire :

Premier angle.

Côté (1)... $A + aD = 0$. Côté (4).. $A - aD = 0$.

Deuxième angle.

Côté (3)... $B + bD = 0$. Côté (6)... $B + bD = 0$.

Troisième angle.

Côté (5)... $C + cD = 0$. Côté (2).. $C - cD = 0$.

$D = 0$ est l'équation de la droite qui contient les trois sommets des angles, et $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sont les équations de droites menées par les sommets des angles d'une façon convenable.

$$(A + aD)(B + bD)(C + cD) = (A - aD)(B - bD)(C - cD)$$

est une équation du troisième degré à laquelle satisfont les coordonnées des sommets de l'hexagone et des sommets des angles, et même d'un point quelconque de la droite $D = 0$.

Supprimons le facteur D qui nous indique cette circonstance, nous aurons l'équation d'une ligne passant par les sommets de l'hexagone

$$aBC + bCA + cAB + abcD^2 = 0.$$

Elle est du second degré; elle représente donc une conique.

Question 844

(voir p. 96);

Par MM. R. DE LAJUDIE et E. SALVY.

Par un point fixe O *sur la circonférence d'un cercle, on mène deux cordes* OA, OB *dont le produit est constant; on demande l'enveloppe de la sécante* AB.

(Dupain.)

Toutes les sécantes AB sont tangentes à une circon-

férence décrite du point O comme centre avec un rayon égal à $\frac{a^2}{2R}$; a^2 étant le produit constant, et R le rayon de la circonférence donnée, car en nommant OI la perpendiculaire abaissée sur AB, on a, d'après un théorème bien connu,

$$OA \times OB = a^2 = OI \times 2R.$$

On arrive au même résultat par le calcul.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Laisant, capitaine du génie à Brest; Bonneau, élève de l'École de Sainte-Barbe; Venceslas Niebylowski, élève à l'École Normale supérieure; Léon Arnoyer, de Carpentras; Bès, de Berg; Jouffray, du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux); Gabriel Lippmann, du lycée Napoléon; A. Hilaire; André Raoul, élève au lycée Louis-le-Grand; Auguste Macé, élève du lycée de Grenoble; P. Goyart, élève du lycée de Lyon (classe de M. Russet); Porte; Jules Barbier, élève du lycée de Grenoble; Drouot et Aldacotche, étudiants à Metz; Welsch et Herment, élèves du lycée de Metz (classe de M. Ribout); E. Jasseron, élève du lycée de Besançon (classe de M. Chevilliet); Adrien Guebhard, élève du lycée Saint-Louis; F.-P. Pourcheiroux, élève du lycée Charlemagne; Arthur Millasseau, élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin); H. Ledoux, élève du lycée de Douai (classe de M. Painvin); Jules Lefebvre, élève de l'École Normale supérieure; Julien Boulanger, élève du lycée de Dijon (classe de M. Marguet); Lesquière, du lycée de Caen; de Villepin, du collége de Stanislas (classe de M. Gros); Fulgence Armanet, de l'École Centrale; O. Espanet, du lycée de Nîmes (classe de Mathématiques élémentaires); Anna Strozzi; M.-D. Thomas, de Taibach; Jannsenn, du lycée de Douai; E. Lattès et G. Lecœur, du lycée de Rouen.

M. Laisant fait remarquer :

1° Que cette enveloppe convient à toute circonférence égale à la première passant par le point O;

2° Que si $a^2 > 4R^2$, on a toujours une enveloppe réelle, bien qu'il soit impossible de tracer un seul système de rayons OA, OB satisfaisant à la condition;

3° Que ce dernier résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Soient* O *une circonférence de centre* O, *et* O' *une autre circonférence passant par le point* O. *Toute tangente à la circonférence* O *coupera la circonférence* O' *en deux points* A *et* B *réels ou imaginaires tels, que le produit* OA.OB *sera constant.*

QUESTIONS.

855. Démontrer que la distance δ d'un point (x, y, z) à une droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ est donnée, dans un système de coordonnées obliques quelconque, par la formule

$$\begin{aligned}\rho^2\delta^2 = &(bz - cy)^2 \sin^2 yz + (cx - az)^2 \sin^2 zx + (ay - bx)^2 \sin^2 xy \\ &+ 2(bz - cy)(cx - az)(\cos yz \cos zx - \cos xy) \\ &+ 2(cx - az)(ay - bx)(\cos zx \cos xy - \cos yz) \\ &+ 2(ay - bx)(bz - cy)(\cos xy \cos yz - \cos zx),\end{aligned}$$

en posant

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

(HOUSEL.)

856. Soient M et M_1 deux points d'une ellipse, tels que les produits des coefficients angulaires des diamètres passant par ces points soient $-\frac{b^2}{a^2}$. En appelant ρ, ρ_1 les rayons de courbure en ces points, r, r_1 les rayons de courbure de la développée aux points correspondant à ceux de l'ellipse, on a les deux relations

$$\rho\rho_1 = ab, \quad \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3.$$

(A. SARTIAUX.)

857. D'un point M situé dans le plan d'une courbe algébrique on mène toutes les tangentes à cette courbe et une droite quelconque MA. Aux points de contact des tangentes issues de M on construit les coniques ayant quatre points confondus sur la courbe et tangentes à MA. Si t désigne la distance comptée sur MA du point M au

point de contact de l'une de ces coniques et R le rayon de courbure de cette conique en ce point de contact, on a

$$\sum \frac{R}{t^4} = 0,$$

la somme s'étendant à toutes les coniques.

(A. Ribaucour.)

858. D'un point M situé dans le plan d'une conique ou mène à celle-ci les deux tangentes MA et MB, puis par M on mène une droite MC.

Aux points A et B on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à MC.

Démontrer que : 1° ces coniques touchent MC au même point C; 2° que si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de MC du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en C quatre points communs confondus. (A. Ribaucour.)

859. Démontrer la même proposition pour les courbes du troisième degré, lorsque M est sur la polaire d'un point d'inflexion. (A. Ribaucour.)

860. Un cercle (C) de centre O roule sur une droite. Trouver le lieu des points d'inflexion des cycloïdes raccourcies décrites par tous les points d'un cercle décrit sur un rayon du cercle (C) comme diamètre. (A. Ribaucour.)

861. Soit (C) un cercle de centre O; OX un diamètre quelconque. On prend sur OX une longueur OM sur laquelle, comme diamètre, on décrit un autre cercle (D). D'un point quelconque A de (C) ou mène la droite AO qui rencontre le cercle (D) en un point B. Avec AB comme rayon on décrit un cercle, dont le centre est en A; on effectue la même construction en chacun des points de (C).

Les cercles ainsi obtenus ont une enveloppe. Déterminer les sommets de cette courbe.

Trouver la nature du lieu de ces sommets, lorsque M se déplace sur le diamètre OX. (A. Ribaucour.)

862. Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, une droite quelconque de son plan enveloppe une développante de parabole. (A. Ribaucour.)

863. Construire un triangle, connaissant les trois parallèles aux trois côtés, qui passent par le centre du cercle inscrit. (Lemoine.)

864. Construire un triangle, connaissant le ssommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés.

(Lemoine.)

865. On circonscrit à une surface de vis à filet carré une surface développable dont les divers plans tangents sont parallèles aux plans tangents à un cône du second degré, la projection de la courbe de contact sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'héliçoïde est une podaire de conique. (Laguerre-Verly.)

RECTIFICATIONS.

Rectifications pour le § II *de la Note sur le nombre e.*

Page 18, *ligne* 6. — La condition $p > x > 0$, à laquelle est subordonnée la double inégalité (4), n'est pas suffisante pour une partie des valeurs de x moindres que l'unité. Mais on évite toute restriction de la formule (4) à cet égard, en prenant les valeurs de p à partir de $p = 1$.

Page 20, *ligne* 8 *et suivantes*. — Comme pour la formule (4), nous prendrons ici $p \geqq 1$, lorsque x est une fraction, afin d'éviter une restriction relativement à sin x. Pour $p = 1$, les for-

mules posées donnent

$$1 > \cos x > \frac{1}{1+x^2}, \quad x > \sin x > \frac{x}{1+x^2},$$

x étant compris entre 0 et 1 ; ce qui est exact.

Mais c'est par inadvertance qu'on a dit que les quantités $\cos x$, $\sin x$ seront *toujours* comprises entre les expressions indiquées page 20, et qu'on a énoncé sans restriction les doubles inégalités qui suivent à la même page. Ces relations n'ont lieu que pour des intervalles déterminés, dans lesquels on fait varier x, intervalles distincts pour chaque double inégalité.

La discussion complète des formules en question exige des détails minutieux, et sur lesquels on pourra revenir, ainsi que sur quelques autres points touchés incidemment dans la Note qui précède.

Errata.

Tome VII (2e série), *page* 116, *ligne* 13, *au lieu de* : L'un des auteurs des deux Notices, *lisez* : L'auteur de l'une des deux Notices. (JONQUIÈRES.)

CORRESPONDANCE.

M. Duranton, professeur au Puy, nous envoie une solution élégante de la question suivante, que nous proposons comme exercice à nos lecteurs, quoiqu'elle ne soit pas complétement nouvelle :

Par un point M d'une surface S du second degré on mène trois droites parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde et par les seconds points d'intersection de ces droites avec la surface on fait passer un plan P. On propose : 1° de démontrer que ce plan passe par un point fixe N ; 2° de trouver le lieu de ce point lorsque le point M parcourt la surface S.

Résoudre le même problème en remplaçant par trois droites rectangulaires les droites parallèles aux diamètres conjugués.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A LA GÉOMÉTRIE

(voir p. 144);

PAR M. ABEL TRANSON.

V.

A la fin de l'année 1846, j'ai fait connaître à la Société Philomathique : 1° la démonstration ci-dessus exposée du théorème relatif aux centres de similitude de trois figures homothétiques; 2° la similitude des régions infinitésimales qui se correspondent dans toute transformation résultant d'une équation entre deux variables directives; 3° la relation de toute ellipse avec les deux cercles concentriques dont les diamètres sont respectivement la somme et la différence des axes de cette ellipse, comme aussi la propriété correspondante de toute hyperbole. C'était à l'occasion d'un Rapport que j'avais été chargé de faire sur un premier Mémoire de M. Faure (de Gap), intitulé : *Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités imaginaires* (*). En même temps l'auteur avait communiqué les premières feuilles d'un second Mémoire dont la publication, à ce que je crois, n'a pas été achevée, dans lequel il proposait l'interprétation géométrique de toute équation à deux variables par une corrélation entre

---

(*) Chez Bachelier, 1845. Ce Mémoire contient une démonstration du théorème fondamental que toute équation a au moins une racine. Malheureusement cette démonstration est sujette au même genre de difficultés que M. Liouville a objectées à celle de Mourey (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. IV, p. 501; 1839). En revanche on y trouve des considérations très-remarquables sur certaines équations dont l'auteur enseigne à opérer l'abaissement sans calcul, ce qu'on pourrait appeler l'*abaissement à vue*.

deux chemins inclinés issus d'une même origine, et c'est de cette idée première que j'avais déduit ces mêmes trois résultats ci-dessus énumérés, que j'ai été dans le cas de rappeler à la Société Philomathique dans sa séance du 14 mai 1864 (*).

Mais en 1846 non plus qu'en 1864, je ne savais pas que l'Algèbre directive pût réduire à de simples éliminations la solution d'une question comme celle de la trajectoire oblique d'un système d'ellipses homofocales, c'est-à-dire d'une question qui paraissait réclamer essentiellement le recours au calcul intégral. Cette singulière propriété dont le calcul directif paraît doué au moins à l'égard de certaines questions se présente encore dans la solution du problème suivant dont la condition conduit à une équation différentielle du second ordre.

Problème. — *Trouver l'équation générale des courbes dont la tangente rencontre sous un angle constant la droite qui partage dans un rapport donné l'angle du rayon vecteur avec une direction fixe* (*avec l'axe polaire*).

Concevons donc une droite qui partage l'angle ω du rayon vecteur dans le rapport de $\frac{n}{m}$ à l'unité, c'est-à-dire qui fait elle-même avec l'axe polaire un angle égal à $\frac{n}{m}\omega$; soit ε l'angle constant sous lequel cette droite est rencontrée par la tangente; α l'angle de la tangente avec le rayon vecteur ρ; et soient ρ' et ρ'' les dérivées première et seconde de ρ considéré comme fonction de ω. La con-

(*) *Voir* le journal *l'Institut*, et aussi le *Bulletin de la Société Philomathique*.

dition de la question est la suivante :

$$\alpha + \frac{m-n}{m}\omega = \varepsilon \quad \text{ou bien} \quad m d\alpha + (m-n) d\omega = 0.$$

D'ailleurs en ayant égard à la relation connue

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \text{on obtient} \quad d\alpha = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} d\omega;$$

ce qui conduit finalement à l'équation différentielle

$$m\rho\rho'' - (2m - n)\rho'^2 - (m-n)\rho^2 = 0.$$

Mais traitons la question par le calcul directif. Soit u la variable dont l'extrémité trace la courbe cherchée. L'inclinaison de l'accroissement directif du, c'est l'inclinaison de la tangente elle-même; d'après la règle pour l'élévation aux puissances, règle à déduire de celle de la multiplication, la quantité directive $u^{\frac{n}{m}}$ a pour inclinaison $\frac{n}{m}\omega$, si ω est l'inclinaison de u. Enfin l'inclinaison d'un quotient directif étant égale à la différence des inclinaisons de ses deux termes, la condition du problème est que l'angle de $\frac{du}{u^{\frac{n}{m}}}$ soit constant.

En même temps considérons u comme la fonction transformante d'une variable z, de sorte qu'on ait

$$\frac{du}{u^{\frac{n}{m}}} = \frac{m}{m-n}\varphi'(z)\,dz, \quad \text{ou bien} \quad u^{\frac{m-n}{m}} = \varphi(z).$$

Quel que soit $\varphi(z)$, si z décrit un chemin tel que l'inclinaison du produit $\varphi'(z)\,dz$ soit constante, on est assuré que u décrira quelqu'une des courbes cherchées;

et réciproquement, lorsque la fonction u suivra une de ces courbes, le chemin de z sera déterminé par la condition ci-dessus exprimée. En un mot, toutes les courbes cherchées sans exception peuvent résulter de l'équation directive $u^{\frac{m-n}{m}} = \varphi(z)$, quel que soit $\varphi(z)$. Supposons donc la forme la plus simple $\varphi(z) = z$. Alors il faudra que l'inclinaison de dz soit constante, c'est-à-dire il faudra que l'extrémité de z parcoure une ligne droite. Soit $y = b + ax$ l'équation cartésienne en coordonnées rectangulaires de cette droite, on pourra remplacer z par $x + i(b + ax)$, et en même temps u par $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$. Faisant ces substitutions, et égalant entre elles les composantes horizontales, et aussi entre elles les composantes verticales, il viendra les deux équations

$$\rho^{\frac{m-n}{m}} \cos \frac{m-n}{m}\omega = x, \quad \rho^{\frac{m-n}{m}} \sin \frac{m-n}{m}\omega = b + ax,$$

entre lesquelles il faudra éliminer x; on trouvera ainsi l'équation

$$\rho^{\frac{m-n}{m}} \left(\sin \frac{m-n}{m}\omega - a\cos \frac{m-n}{m}\omega\right) = b:$$

équation finie qui satisfait à l'équation du second ordre du problème, et qui en est l'intégrale générale, puisqu'elle contient deux constantes arbitraires. La constante a est précisément la tangente de l'angle que nous avions représenté par ε, et il ne serait pas difficile de définir l'autre constante.

Le résultat final serait illusoire dans le cas de $m = n$; mais alors il faudrait reprendre la condition du calcul directif, qui serait ici

$$\frac{du}{u} = \varphi'(z)\,dz, \quad \text{ou bien} \quad u = ce^{\varphi(z)}.$$

On expliquerait encore que $\varphi(z)$ peut être égal à z pourvu qu'on fasse parcourir à z une droite quelconque; et en suivant la même marche que ci-dessus, on arriverait à l'équation

$$\rho = ce^{\frac{\omega}{a}},$$

c'est-à-dire, comme cela devait être, à l'équation générale des spirales logarithmiques de même pôle.

VI.

Ainsi l'idée claire du nombre directif substituée à l'idée obscure du nombre imaginaire ne serait pas seulement l'unité établie dans la science, ce serait aussi, à ce qu'il semble, un nouvel instrument pour ses progrès ultérieurs. D'ailleurs, ce qu'il importe surtout de remarquer et sur quoi je veux, en terminant cette exposition incomplète, fixer l'attention du lecteur, c'est que le calcul directif, en donnant à la notion du nombre abstrait un complément devenu indispensable, maintient les conceptions relatives à la nature des opérations élémentaires (*addition, multiplication*) sans aucun mélange de *convention arbitraire*. Cela importe à l'enseignement des mathématiques et cela importe à la philosophie elle-même, car la philosophie a le droit et le besoin de citer en exemple les Sciences mathématiques comme reposant sur des idées *rationnelles*, c'est-à-dire sur des idées constitutives de la Raison, c'est-à-dire sur des idées qui sont à la fois indépendantes de la *Volonté* et de l'*Expérience;* car enfin :

Ni les vérités de la Géométrie ne sont des résultats de l'expérience; puisque, par exemple, si on nous a fait voir à l'aide des polygones inscrits au cercle que la longueur de la circonférence est comprise entre vingt et une et vingt-deux fois la septième partie du diamètre, notre con-

viction ne sera pas plus augmentée par le résultat conforme d'un mesurage effectif qu'elle ne serait ébranlée par un résultat contraire : c'est le theorème démontré qui jugera si ce mesurage est bon, et ce n'est pas ce mesurage qui fera le jugement du théorème; et ce que nous disons d'une vérité déduite des principes de la Géométrie, nous pouvons le dire aussi de toutes les idées premières ou conceptions qui sont ces principes mêmes; puisque, par exemple, s'il est vrai que la *raie* grossière et le *rond* irrégulier tracés sur le tableau par notre premier professeur ont éveillé en nous les idées de la *ligne droite* et du *cercle,* il est également vrai que jamais des yeux du corps nous n'avons vu l'un ou l'autre;

Ni d'autre part les principes et les règles de l'Algèbre ne sont des choses de convention; car si quelqu'un me dit que les quantités positives isolées et aussi les négatives isolées sont des êtres de convention, et que la règle des signes relative à ces sortes de quantités est une règle de convention, et encore que la notion des nombres imaginaires et leur calcul sont une notion et un calcul de convention, je le prierai de me faire voir comment l'Algèbre pourrait exister sans ces conventions, ou bien avec d'autres conventions que celles-là, puisque enfin celui qui dit convention veut dire certainement une chose arbitraire, une chose dont on peut se passer et qu'on peut remplacer par une autre. Or la double qualité des nombres d'être positifs ou négatifs s'impose à nos calculs dès le premier degré de l'algèbre, et depuis lors elle n'en disparaît plus. Et lorsqu'à notre second pas nous rencontrons, rencontre inattendue! *la racine carrée d'un nombre négatif!* c'est bien en vain que nous lui disons : « Tu n'existes pas! tu es impossible! tu es imaginaire!... » Malgré toutes nos dénégations et toutes nos objurgations la racine tient bon; elle ne se laisse pas extraire (si ce n'est par Argand, Fran-

çais, Mourey, etc.); et nous, tout en lui déniant la possibilité d'être, nous sommes forcés de l'admettre, de la subir; et bientôt à sa suite surgissent de tous côtés, je veux dire *à tous les degrés de l'Algèbre,* une infinité d'autres racines qu'elles aussi nous appelons impossibles!... Oui, on les déclare impossibles, mais bien en vain voudrait-on établir *la convention* de les déclarer inutiles; car elles se retrouvent à tous les niveaux de la science et elles en sont l'instrument le plus précieux; et au milieu de leur multitude les autres racines que nous jugions seules possibles n'apparaissent plus qu'à titre d'exception; et enfin, le calculateur arrive à ce résultat aussi incontesté qu'il est étrange que ce qu'il appelait exclusivement le Réel n'est plus qu'un cas très-particulier de ce qu'il avait appelé l'Imaginaire.

Ces difficultés, pour celui qui en ignore le dénoûment et qui aime à pénétrer le fond des choses, doivent sembler comme un voile placé entre l'esprit de l'homme et la vérité. L'Algèbre lui paraissant dépasser par son étendue l'ordre des réalités connues, ce doit lui être comme un indice que parmi les réalités de ce monde que sans doute l'imperfection de nos sens nous empêche de saisir, ou peut-être parmi celles de quelque monde construit sur un plan différent du nôtre, il est des grandeurs qui correspondent à ces symboles inexpliqués; car, s'il se pouvait qu'à une conception utile de l'être intelligent manquât indéfiniment la correspondance d'un objet intelligible, ce serait une note fausse dans l'harmonie universelle.

Eh bien, dirai-je à cet ami de l'Évidence (*), si de telles grandeurs existent ne devront-elles pas, pour correspondre aux différents états du nombre (état réel, positif ou négatif; état imaginaire susceptible d'une infinité

(*) Mourey avait dédié son livre *aux Amis de l'Évidence.*

d'arguments), ne devront-elles pas admettre différents modes d'existence? Et d'abord ne devront-elles pas admettre dans tous leurs modes une dualité constante, de sorte qu'à chacun d'eux en corresponde un autre qui lui soit opposé, contraire ou inverse, dualité telle que par leur juxtaposition (addition), les deux modes opposés se neutralisent? — Et ensuite chacun de ces modes ne devra-t-il pas admettre une modification particulière qui, répétée sur elle-même, soit capable de produire le mode opposé, puisque telle est évidemment la condition pour qu'une grandeur réelle corresponde toujours à la racine carrée du nombre qui représentera un mode déterminé de la grandeur primitive (*).—Et, enfin, pour exprimer en une proposition unique la condition nécessaire de la correspondance supposée, ne faudrait-il pas que les modes d'une telle grandeur passassent de l'un à l'autre d'une manière continue, de telle sorte que la modification qui produit l'un d'eux puisse, étant répétée un nombre de fois convenable, en produire un autre quel qu'il soit?

Appliquée à toute grandeur qui serait douée de ces modes d'existence, notre Algèbre n'aurait pas trop d'étendue; elle aurait précisément l'étendue convenable. Mais à ces différents traits qui n'a pas reconnu en particulier la condition des chemins tracés sur un plan dans toute direction à partir d'un point fixe? Et puisque ainsi nous avons à notre disposition une grandeur dont toutes les propriétés correspondent exactement aux propriétés algorithmiques de nos symboles, comment persisterions-

(*) M. Vallès, dans un passage des *Études philosophiques sur la science du calcul* que je cite de mémoire, a dit judicieusement : « Si quelque grandeur subit une modification qui répétée sur elle-même la fait passer de l'état positif à l'état négatif, cette modification constitue un état intermédiaire qui doit être caractérisé dans le calcul par le symbole $\sqrt{-1}$. »

nous à dire que ces symboles ne représentent rien de réel?...

A la vérité, parmi les grandeurs que nous soumettons au calcul, il en est un grand nombre pour lesquelles les ressources de la science algorithmique sont une richesse superflue. Combien par exemple en est-il pour lesquelles la divisibilité indéfinie de l'unité abstraite est inutile, parce qu'elles se composent d'unités concrètes indivisibles? Et combien pour lesquelles le double état positif et négatif des nombres est un véritable non-sens, parce qu'elles ne sont pas susceptibles de s'accroître en deux sens opposés? — Cependant il suffit que quelques grandeurs soient indéfiniment divisibles pour que l'apparition de la forme fractionnaire dans la solution d'un problème quel qu'il soit ne nous étonne pas. Et pour ce qui est des solutions négatives, depuis Descartes elles ont cessé d'être *fausses,* non pas qu'elles soient *vraies* pour toutes sortes de questions, mais parce qu'elles le sont au moins pour quelques-unes. Malheureusement, l'idée de Descartes a manqué, pendant un siècle et demi, de son complément nécessaire qui consistait à faire entrer dans le calcul avec les deux chemins opposés (positif et négatif) tous les chemins de direction intermédiaire. Et comme dans le même temps se sont produites inévitablement, et par la force propre du calcul, diverses formes équivalentes au nombre directif, lesquelles n'auraient pu recevoir d'interprétation que par leur correspondance avec ces chemins intermédiaires, on s'est habitué à croire que l'Algèbre pouvait conduire le calculateur à des résultats dépourvus de signification et de réalité, en un mot à des *résultats imaginaires!* — Il est temps d'affirmer, au contraire, que toutes les racines des équations algébriques sont réelles, non pas en ce sens qu'elles procurent toujours aux problèmes qui leur ont donné naissance des solutions possibles, ce

qui serait une assertion fausse et absurde, une assertion contraire à la vérité et à la raison; mais parce que de telles équations ayant lieu entre des nombres abstraits peuvent toujours, indépendamment des problèmes initiaux, être considérées comme traduisant une relation déterminée entre des grandeurs linéaires, c'est-à-dire entre des chemins diversement inclinés, et qu'à ce point de vue leurs solutions (leurs racines) sont toujours constructibles.

Nota. — Je dois reconnaître que dans les articles précédents j'ai attribué à Mourey une part trop grande dans toutes ces inventions. Au tome IV des *Annales* de Gergonne, on apprend qu'une première idée au sujet de la représentation géométrique des imaginaires avait été émise par Buée (en 1806). Plus tard, en 1813, par Argand et Français à la fois mais séparément, cette idée est retrouvée et développée. Le premier de ces Géomètres donne déjà une ébauche très-remarquable de la démonstration récemment perfectionnée par M. Hoüel du théorème fondamental : que toute équation a une racine. Le second expose avec clarté l'extension des principes fondamentaux du calcul à des nombres propres à représenter les grandeurs géométriques ; et pour ces nombres que Mourey a appelés *directifs,* Français propose déjà le symbole si simple a_ω ; puis de ce symbole et des règles du calcul il déduit comme corollaires évidents ces beaux résultats : « Que les rayons qui partagent en m parties égales la circonférence dont le rayon est 1, représentent les m racines de l'unité ; que ces racines sont toutes également réelles, puisqu'elles sont représentées par des lignes données de grandeur et de position, etc. » Et comme le célèbre Servois s'était demandé : « La nouvelle théorie est-elle au moins justifiée par de nombreuses applications ? »

Gergonne, qui avait déjà dit très-judicieusement : « On ne peut espérer ces résultats que du temps et des efforts de tous ceux qui voudront bien ne pas rejeter cette théorie avec dédain sans l'avoir sérieusement examinée (*Annales*, t. IV, p. 73) ; Gergonne répond à la critique prématurée de Servois : « M. Servois compterait-il donc pour peu de voir enfin l'analyse algébrique débarrassée de ces formes inintelligibles et mystérieuses, de ces *non-sens* qui la déparent et en font, pour ainsi dire, une sorte de science cabalistique. » (*Ibid.*, p. 230.)

VII.

C'est donc à l'égard seulement des problèmes de Géométrie que nous avons à justifier l'assertion que toutes les racines des équations sont réelles ; et à cet effet, ne suffit-il pas d'opposer à l'opinion commune exprimée par M. Poncelet dans les termes suivants, à la fin d'une longue dissertation *sur la loi des signes de position en Géométrie* : « Concluons que les racines négatives indiquent des solutions réelles en même temps qu'un changement dans les hypothèses sur la situation des inconnues, et que, à l'inverse, les imaginaires indiquent que, pour les grandeurs actuelles des données du problème, les solutions examinées sont véritablement impossibles, quoiqu'elles puissent devenir possibles et constructibles géométriquement en changeant ces grandeurs sans changer les hypothèses (*) ; » ne suffit-il pas d'opposer à cette opinion,

---

(*) *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. II, p. 206. — Quelques personnes ont cru pouvoir dire que, dans cet ouvrage, M. Poncelet aurait jugé à fond et réfuté la doctrine proposée par Argand et Français et développée par Mourey. Mais je n'y trouve que quelques fragments d'une Note composée en 1816 et reproduite en 1864 où l'auteur se borne à affirmer que les équations du nouveau calcul *manquent d'homogénéité* et que

d'abord que bien évidemment si l'on change les grandeurs des données sans changer les hypothèses sur la situation des inconnues, non-seulement les racines imaginaires, mais aussi les négatives peuvent devenir constructibles (en sens positif); mais de plus que *les racines imaginaires, comme les négatives, indiquent des solutions réelles, à la condition de changer les hypothèses sur la situation des inconnues sans d'ailleurs changer aucunement les grandeurs des données*. C'est là un des plus importants résultats de la nouvelle Algèbre; aussi est-il rigoureusement exact de dire que la plupart des problèmes déterminés de la Géométrie dont on a donné depuis longtemps la solution n'ont jamais été complétement discutés et ne pouvaient pas l'être avant l'introduction du calcul directif, puisque la circonstance d'une racine imaginaire paraissait être l'indication d'une impossibilité absolue et ainsi excluait toute idée d'un examen ultérieur. Cependant, si le lecteur veut s'exercer sur quelqu'un de ces problèmes élémentaires, il reconnaîtra aisément que, dans le cas des imaginaires, toujours quelques chemins inclinés satisfont pleinement et exclusivement aux équations du problème, et, par conséquent, en représentent les racines, quoiqu'à la vérité ils ne puissent le plus souvent correspondre à l'énoncé verbal de la question primitive que si l'on modifie convenablement cet énoncé. Mais n'est-ce pas sous cette réserve expresse

---

le symbole a_ω, où a est une longueur constante et ω un angle variable, ne peut pas représenter un cercle et qu'il représente nécessairement une *spirale logarithmique imaginaire!* (*Ibid.*, p. 594). Il n'y a rien à répondre à ces deux assertions; mais si les circonstances dans lesquelles a été composé le dernier ouvrage de M. Poncelet suffisent à expliquer quelques méprises de sa part, il est moins facile d'expliquer comment, dans un journal scientifique (*Les Mondes*, livraison de février 1868), on a pu considérer de telles méprises comme constituant un JUGEMENT A FOND!

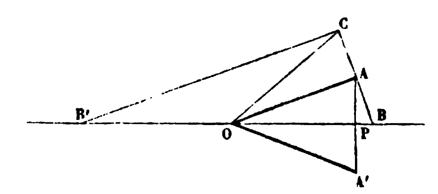
qu'on admet comme réelles les solutions négatives, et qu'on en fait l'interprétation?....

Je prendrai pour unique exemple le problème de déterminer simultanément deux points sur une droite lorsqu'on connaît leur point-milieu, et le produit, ou rectangle, de leurs distances à une origine commune prise sur la même droite.

Soient q le produit de ces deux distances et p la distance du point-milieu à l'origine. L'équation

$$x^2 - 2px + q = 0$$

donnera par ses racines, et dans tous les cas, la solution du problème. En effet, lorsque les racines sont réelles, elles mesurent les chemins qu'il faut parcourir sur la droite fixe, à partir de l'origine, pour arriver aux points cherchés. Quand elles sont ce que l'on appelle *imaginaires*, elles mesurent deux chemins qui sont encore *réels* et qui satisfont exactement aux deux conditions de la question, mais qui a la vérité ne sont plus sur la droite donnée.



Ce sont les chemins OA, OA′, construits en portant d'abord à partir de l'origine O une longueur OP égale à p, puis en élevant de part et d'autre de P les perpendiculaires PA, PA′ égales l'une et l'autre à $\sqrt{q - p^2}$.

Ces deux chemins inclinés ont bien, pour milieu entre leurs extrémités, le point donné P; le produit de leurs longueurs est bien aussi un nombre sans inclinaison, puis-

que leurs deux inclinaisons sont égales et de signes contraires; et c'est bien un nombre égal à q puisque chacun d'eux est numériquement égal à $\sqrt{q}$. Enfin en mettant préalablement l'équation du problème sous la forme

$$\frac{x^2}{p} - 2x + \frac{q}{p} = 0,$$

il est facile de s'assurer que chacun de ces deux chemins inclinés, OA par exemple, est l'une des deux racines.

A cet effet, élevons en A perpendiculairement à OA une droite que nous prolongerons d'une part jusqu'en B à la rencontre de la droite donnée, et d'autre part jusqu'à la rencontre de la ligne OC, celle-ci menée de sorte que l'angle AOC soit égal à l'angle AOB; enfin par le point C menons CB′ parallèle à AO jusqu'à la rencontre de BO prolongée au delà de O.

Premièrement OC a une inclinaison double de celle de OA; à cause de cela et de sa valeur numérique déduite des triangles semblables OAC, OPA, on a évidemment $OC = \frac{\overline{OA}^2}{p}$; secondement B′C représente en grandeur et en direction $2OA$; troisièmement B′O est égal à OB, qui lui-même est égal en valeur numérique à OC, mais qui est sans inclinaison; de sorte que B′O est égal au nombre positif $\frac{q}{p}$. Le chemin brisé OC + CB′ + B′O est donc identiquement égal à

$$\frac{\overline{OA}^2}{p} - 2\overline{OA} + \frac{q}{p}.$$

D'ailleurs ce chemin brisé est nul, puisque ses extré-

mités coïncident en O; il est donc prouvé que OA satisfait à l'équation donnée.

A la vérité, lorsqu'on cherche à déterminer les deux points de rencontre d'une droite et d'un cercle, on est conduit à la même équation que ci-dessus, et quelqu'un, dans le cas des racines imaginaires, pourra dire que nos points A et A' ne sont pas de telles rencontres. Je suis du même avis; mais il ne s'agit pas d'accepter une Algèbre qui donnerait des choses qui n'existent pas; il s'agit de choisir entre l'Algèbre actuelle, qui dans la circonstance des racines imaginaires ne peut satisfaire aux équations qu'avec ce que Gergonne appelait des *non-sens*, des formes *inintelligibles* et en quelque sorte *cabalistiques*; avec ce que M. Hoüel appelle non moins judicieusement des *compensations d'absurdités*; oui, il s'agit de choisir entre cette Algèbre et une Algèbre autre qui dans tous les cas satisfait aux équations par des grandeurs réelles et constructibles.

Toutefois la nécessité de faire un tel choix est-elle bien établie, ou du moins l'alternative est-elle aussi étroite que je le suppose? Car, sans nous écarter de l'exemple ci-dessus :

Premièrement, quand une droite ne rencontre pas un cercle, n'existe-t-il pas déjà une construction bien connue qui est propre à figurer les conséquences de cette non-rencontre, et les analogies de ces conséquences avec toutes celles qu'aurait une rencontre véritable?... Qui donc ignore la théorie des *sécantes idéales* de M. Poncelet, sa belle théorie des *coniques supplémentaires*, etc.?

Et secondement, lorsqu'il y a à déterminer deux points sur une droite par leur point-milieu et par le produit de leurs distances à un point fixe de la droite, ces *éléments* qui subsistent toujours, c'est-à-dire lors même que les deux points sont imaginaires, ne conservent-ils pas avec

les autres parties de la figure les mêmes relations que si ces deux points étaient réels? Autrement, et d'une manière générale, n'échappera-t-on pas toujours à la nécessité de faire entrer explicitement les objets imaginaires, *points* ou *lignes*, dans les raisonnements s'ils y sont toujours représentés par des éléments *réels?* Ou, autrement encore, à quoi bon la représentation géométrique (la *réalisation*) des racines imaginaires, s'il suffit à nos recherches de considérer leurs fonctions symétriques?... Enfin qui donc ignore le grand parti que M. Chasles a tiré de *la représentation des grandeurs imaginaires par leurs éléments réels?*

Ainsi, d'une part, la représentation directe des imaginaires pourrait se faire autrement que par les chemins inclinés auxquels la nouvelle doctrine fait correspondre ses nombres directifs; et d'autre part cette représentation serait sans utilité positive.

Certes, ma conviction ne serait pas entière si, de moi-même, je ne portais pas la discussion sur ce terrain; et de plus, ma thèse ne manquerait-elle pas de vérité si elle pouvait recevoir quelque contradiction des résultats que nous devons aux deux illustres maîtres que je viens de nommer?...

(*La fin prochainement.*)

SUR LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE DE LOBATCHEFFSKY;

PAR M. G. BATTAGLINI (*).

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, juin 1867.

Giornale di Matematiche, t. V, p. 217.

La publication récente de la traduction française d'un opuscule de Lobatcheffsky (**) a appelé l'attention des mathématiciens sur le système de Géométrie fondé par Lobatcheffsky, sous le nom de *Géométrie imaginaire* (***),

(*) Nous avons profité, dans notre traduction, de quelques développements qui nous ont été communiqués par l'auteur.

L'orthographe que nous avons adoptée pour le nom de *Lobatcheffsky* est celle que le géomètre russe a employée lui-même dans son dernier ouvrage, publié en français à Kasan. J. H.

(**) *Études géométriques sur la Théorie des parallèles*, par N. LOBATCHEFFSKY. Traduit de l'allemand par J. Hoüel. Paris, Gauthier-Villars, 1866. — Prix : 2 fr. 50 c.

(***) *Nouveaux principes de Géométrie, avec une Théorie complète des parallèles* (*Mémoires de l'Université de Kasan*, 1835-38) (en langue russe).

Géométrie imaginaire (*Ibid.*, 1835; en russe. — Un abrégé de ce Mémoire a paru dans le *Journal de Crelle*, t. XVII, 1837).

Pangéométrie, ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles (Kasan, 1855; en français). — Ce Mémoire vient d'être traduit en italien par M. Battaglini (*Giornale di Matematiche*, t. V, p. 273-336). — Prix : 8 fr.

Dès l'année 1826, Lobatcheffsky avait fait connaître les résultats de ses recherches dans une dissertation lue le 12 février devant l'Université de Kasan, et intitulée : *Exposition succincte des principes de la Géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*. Il a publié depuis, en 1829 et en 1830, des articles sur le même sujet dans le *Courrier de Kasan*.

Ces résultats, que Gauss possédait depuis longtemps, coïncident avec ceux auxquels parvenait, vers la même époque, le géomètre hongrois J. Bolyai.

en prenant pour base une théorie des parallèles différente de la théorie *euclidienne* ordinaire.

Dans cette Note, j'ai cherché à établir directement le principe qui sert de base à la *nouvelle* théorie des parallèles, et à parvenir ainsi, par une autre voie que Lobatcheffsky, aux formules qui expriment les relations entre les parties d'un triangle dans la Géométrie imaginaire.

I.

Si, pour indiquer une position déterminée de la droite indéfinie Ω, mobile autour d'un point p du plan P, nous convenons d'employer le symbole

$$\Omega_z = \Omega_0 \, F(z),$$

z désignant *la grandeur de la rotation* effectuée par la droite mobile, pour passer d'une position initiale arbitraire Ω_0 à la position actuelle Ω_z, et F étant la caractéristique d'une fonction encore inconnue; nous aurons

$$\Omega_x = \Omega_0 \, F(x), \quad \Omega_y = \Omega_0 \, F(y),$$
$$\Omega_z = \Omega_x \, F(z-x) = \Omega_y \, F(z-y).$$

On en conclura, pour déterminer la fonction F, la relation

$$F(x) F(z-x) = F(y) F(z-y),$$

ou, si l'on fait $x = 0$, en remarquant que $F(0) = 1$, et que l'on change ensuite z en $x + y$,

$$(1) \qquad F(x+y) = F(x) F(y).$$

En différentiant cette équation par rapport à x et à y, et désignant par k une constante, réelle ou imaginaire, il viendra

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{F'(y)}{F(y)} = \frac{F'(z)}{F(z)} = k,$$

d'où l'on tire, e étant la base des logarithmes naturels,

$$F(z) = e^{kz} = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1.2} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \ldots$$

Si l'on fait tourner la droite Ω indéfiniment autour du point p dans le plan P, cette droite repassera périodiquement par une position donnée quelconque. Cette propriété donne le moyen de déterminer la constante k, contenue dans la valeur de $F(z)$. La fonction e^{kz} ne pouvant reprendre périodiquement les mêmes valeurs, pour z réel, tant que k n'est pas une *imaginaire pure,* nous sommes conduits à remplacer k par ik, i désignant $\sqrt{-1}$, et à poser, par conséquent,

$$F(z) = e^{ikz}.$$

Appelons : *cosinus circulaire* et *sinus circulaire* de z *par rapport à la base* k les expressions

$$\cos z = 1 - \frac{k^2 z^2}{1.2} + \frac{k^4 z^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin z = \frac{kz}{1} - \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \frac{k^5 z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots;$$

tangente circulaire et *cotangente circulaire* de z les fonctions

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

On aura

$$e^{ikz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-ikz} = \cos z - i \sin z,$$

$$e^{2ikz} = \frac{1 + i \operatorname{tang} z}{1 - i \operatorname{tang} z} = \frac{\cot z + i}{\cot z - i},$$

relations d'où l'on tire facilement les expressions connues de

$$\cos(x+y),\ \sin(x+y),\ \operatorname{tang}(x+y),\ \cot(x+y).$$

Soit 2π la valeur de kz qui donne

$$e^{2i\pi} = \cos\frac{2\pi}{k} + i\sin\frac{2\pi}{k} = 1;$$

$\frac{2\pi}{k}$ sera la *période* de la fonction e^{ikz}. En remarquant que l'on tire de la condition précédente

$$e^{i\pi} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$

on aura, pour toute valeur entière, positive ou négative, de n,

$$\cos(2n+1)\frac{\pi}{2k} = 0, \quad \sin 2n\frac{\pi}{2k} = 0.$$

On en conclut les expressions suivantes, sous forme de produits infinis,

$$(2)\quad \begin{cases} \cos z = \left(1 - \dfrac{4k^2z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{4k^2z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{4k^2z^2}{25\pi^2}\right)\ldots, \\ \sin z = kz\left(1 - \dfrac{k^2z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{k^2z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \dfrac{k^2z^2}{9\pi^2}\right)\ldots. \end{cases}$$

En faisant dans la seconde $kz = \frac{\pi}{2}$, on en tire

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots},$$

d'où

$$\pi = 3,14159\ldots$$

En prenant pour *unité de rotation* de la droite Ω autour du point p dans le plan P, le quart de la rotation qui ramène *pour la première fois* la droite à sa position initiale, on aura $\frac{2\pi}{k} = 4$, d'où $k = \frac{\pi}{2}$. La quantité z, dans les formules précédentes, sera la *mesure* de l'angle

compris entre les droites Ω_0 et Ω_z, rapporté à l'angle droit pris pour unité. Pour plus de simplicité dans les formules, nous supposerons $k=1$, ce qui revient à prendre pour unité angulaire l'angle droit divisé par le nombre $\frac{\pi}{2}$.

On parvient aux mêmes résultats, lorsque l'on convient d'indiquer par le symbole $\Omega_z = \Omega_0 \mathrm{F}(z)$ une position déterminée d'un plan Ω, mobile autour de la droite l, z étant la *grandeur de la rotation* effectuée par le plan mobile pour passer de la position initiale Ω_0 à la position actuelle Ω_z. Si l'on suppose, comme tout à l'heure, $k=1$, z sera la mesure de l'angle compris entre les plans Ω_0 et Ω_z, cet angle étant rapporté à une unité égale à l'angle dièdre droit divisé par $\frac{\pi}{2}$.

Indiquons maintenant par le symbole

$$\omega_z = \omega_0 \mathrm{F}(z)$$

une position déterminée du point ω, mobile sur une droite donnée L, z étant *la grandeur de la translation* du point mobile passant de la position initiale ω_0 à la position actuelle ω_z. Nous aurons encore ici l'équation (2). Mais, comme le point, en s'avançant indéfiniment sur la droite L, ne repasse plus périodiquement par une quelconque de ses anciennes positions, nous ne pourrons plus déterminer comme précédemment la constante k, que nous conserverons sous sa forme indéterminée.

Appelons : *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* de z, *par rapport à la base k*, les expressions

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{Ch}\, z = 1 + \dfrac{k^2 z^2}{1.2} + \dfrac{k^4 z^4}{1.2.3.4} + \ldots, \\ \mathrm{Sh}\, z = \dfrac{kz}{1} + \dfrac{k^3 z^3}{1.2.3} + \dfrac{k^5 z^5}{1.2.3.4.5} + \ldots; \end{cases}$$

tangente hyperbolique et *cotangente hyperbolique* de z les fonctions

$$\mathrm{Th}\, z = \frac{\mathrm{Sh}\, z}{\mathrm{Ch}\, z}, \quad \mathrm{Coth}\, z = \frac{\mathrm{Ch}\, z}{\mathrm{Sh}\, z}.$$

On aura

$$e^{kz} = \mathrm{Ch}\, z + \mathrm{Sh}\, z, \quad e^{-kz} = \mathrm{Ch}\, z - \mathrm{Sh}\, z,$$

$$e^{2kz} = \frac{1 + \mathrm{Th}\, z}{1 - \mathrm{Th}\, z} = \frac{\mathrm{Coth}\, z + 1}{\mathrm{Coth}\, z - 1},$$

relations d'où l'on tire facilement les expressions de

$$\mathrm{Sh}\,(x+y),\ \mathrm{Ch}\,(x+y),\ \mathrm{Th}\,(x+y),\ \mathrm{Coth}\,(x+y).$$

En général, on passe des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques, ou *vice versa,* au moyen des formules

$$\cos z = \mathrm{Ch}\, i\,\frac{z}{k}, \qquad i \sin z = \mathrm{Sh}\, i\,\frac{z}{k},$$

$$i \operatorname{tang} z = \mathrm{Th}\, i\,\frac{z}{k}, \quad -i \cot z = \mathrm{Coth}\, i\,\frac{z}{k}.$$

Tandis que les fonctions circulaires ont la période *réelle* 2π, les fonctions hyperboliques ont la période *imaginaire* $2i\frac{\pi}{k}$.

La quantité z est ici la mesure du segment compris entre les points ω_0 et ω_z, rapporté à un segment *arbitraire* pris pour unité. Si l'on supposait, pour plus de simplicité, $k = 1$, cela reviendrait à prendre pour unité de segment l'unité primitive divisée par le constante k.

II.

Cela posé, considérons, dans un plan, le système des points ω d'une droite fixe L, et le système des droites Ω qui joignent ces points à un point fixe p. Si m, n sont

deux positions fixes de ω, et M, N les positions correspondantes de Ω, alors, pour toute position déterminée de ω (ou de Ω), le rapport $\frac{\text{Sh}\, m\omega}{\text{Sh}\, \omega n}$ $\left(\text{ou le rapport } \frac{\sin \text{M}\Omega}{\sin \Omega\text{N}}\right)$ aura une valeur *unique,* positive ou négative; et réciproquement, pour une valeur donnée, positive ou négative, de l'un ou de l'autre de ces deux rapports, le point ω ou la droite Ω prendront une position *unique et déterminée.* En observant donc qu'à chaque position de ω correspond *une seule* position de Ω, et réciproquement, on en conclut que chacun de ces deux rapports

$$r = \frac{\text{Sh}\, m\omega}{\text{Sh}\, \omega n}, \quad \text{R} = \frac{\sin \text{M}\Omega}{\sin \Omega\text{N}},$$

est une fonction *uniforme* de l'autre, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de l'un d'eux correspond une valeur *unique et déterminée de l'autre.*

Par conséquent, d'après les principes connus de la théorie générale des fonctions (*), chacune des quantités r et R doit être une fonction rationnelle de l'autre, ce qui exige que ces deux quantités soient liées par une équation algébrique du premier degré par rapport à chacune d'elles, et, par suite, de la forme

$$(4) \qquad \alpha r\text{R} + \beta r + \gamma \text{R} + \delta = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des coefficients constants. Mais lorsqu'on fait coïncider respectivement la droite Ω et le point ω soit avec M et m, soit avec N et n, on a : dans le premier cas,

$$\text{Sh}\, m\omega = 0, \quad \sin \text{M}\Omega = 0, \quad r = \text{R} = 0,$$

d'où résulte

$$\delta = 0;$$

(*) *Voyez* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques,* livre I, chap. IV.

dans le second cas

$$\mathrm{Sh}\,\omega n = 0, \quad \sin \Omega \mathrm{N} = 0, \quad r = \mathrm{R} = \infty,$$

d'où résulte

$$\alpha = 0.$$

Donc l'équation (4) doit se réduire à la forme

$$\beta r + \gamma \mathrm{R} = 0,$$

ou, en désignant par λ la constante $-\frac{\gamma}{\beta}$, à la forme

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{Sh}\, m\omega}{\mathrm{Sh}\,\omega n} = \lambda \frac{\sin \mathrm{M}\Omega}{\sin \Omega \mathrm{N}}.$$

Supposons les points m et n à égale distance du pied o de la perpendiculaire O abaissée du point p sur la droite L, et par suite les droites M et N également inclinées sur la droite O. On aura $\lambda = 1$, de sorte qu'en posant

$$o\omega = \theta, \quad \mathrm{O}\Omega = \Theta,$$

l'équation (5) deviendra

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{Th}\,\theta}{\mathrm{tang}\,\Theta} = \frac{\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}\,mn}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{MN}} = \mathrm{const.}$$

Lorsque le point ω parcourt la droite L, dans la direction positive ou négative, depuis o jusqu'à l'infini, $\mathrm{Th}\,\theta$ prend toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $+1$ ou à -1. A la limite des positions de ω, les droites correspondantes Ω feront avec O (de part et d'autre) un angle Δ *différent de l'angle droit* (à moins que p ne soit situé sur L), et déterminé par l'équation

$$(7) \qquad \mathrm{tang}\,\Delta = \frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{MN}}{\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}\,mn}.$$

On arrive ainsi à la conception fondamentale de la théorie des parallèles de Lobatcheffsky (*), savoir, que *par un point p on peut mener deux droites parallèles à une droite donnée* L, c'est-à-dire, deux droites *qui rencontrent* L *à une distance infinie*.

Des équations (6) et (7) on tire

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{Th}\theta = \frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta},$$

de sorte que l'on aura $\operatorname{Th}\theta < 1$ ou > 1 (et par suite θ réel ou imaginaire), suivant que Θ sera $< \Delta$ ou $> \Delta$. Il suit de là que toute droite Ω, menée par le point p, et comprise dans l'angle 2Δ, rencontrera la droite L en un point ω, à une distance *finie* de o, donnée par l'équation

$$\text{(9)} \qquad \theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\operatorname{tang}\Delta + \operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta - \operatorname{tang}\Theta};$$

et toute droite Ω, menée par p *en dehors* de l'angle 2Δ, rencontrera la ligne L en un point situé à une distance *idéale* de o, ayant pour expression

$$\text{(10)} \qquad \theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\operatorname{tang}\Theta + \operatorname{tang}\Delta}{\operatorname{tang}\Theta - \operatorname{tang}\Delta} + i\frac{\pi}{2k}.$$

Les deux parallèles menées par le point p à la droite L (et la rencontrant à une distance *infinie*) marquent le passage des droites menées par p qui rencontrent L en des points situés à une distance *finie*, à celles qui rencontrent L en des points situés à une distance *idéale*. Nous considérerons les points de rencontre idéaux des droites Ω avec la droite L comme *des points de la droite situés au delà de l'infini*.

(*) Il serait peut-être plus juste de donner à cette théorie le nom de *théorie de Gauss*, depuis que la publication de la correspondance de ce grand géomètre nous a montré qu'il en est le premier inventeur. J. H.



L'équation (7) montre qu'en faisant varier la distance δ du point p à la droite L, l'*angle de parallélisme* Δ varie aussi, de sorte que le *nombre* qui exprime l'angle Δ sera une certaine fonction du *nombre* qui exprime la distance δ. Posons

$$\cot\Delta = \Phi(\delta),$$

Φ étant une fonction que nous déterminerons tout à l'heure. Nous remarquerons, en attendant, que, pour les diverses positions du point p sur la droite O perpendiculaire à la droite fixe L, toutes les droites Ω pour lesquelles le rapport $\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta}$ a une valeur déterminée (inférieure, égale ou supérieure à l'unité) rencontreront L en un même point (à une distance finie, infinie ou idéale), déterminé par l'équation (8) ; et *vice versa*. Toutes les droites correspondantes à $\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta} = \infty$, c'est-à-dire toutes les droites perpendiculaires à O rencontreront L au point idéal déterminé par $\theta = i\frac{\pi}{2k}$; et toutes les droites correspondantes à une autre valeur quelconque de $\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\operatorname{tang}\Delta}$ plus grande que l'unité, rencontrant L au point idéal déterminé par l'équation (10), seront toutes perpendiculaires *à une même droite,* savoir à la droite perpendiculaire à L et menée par le point déterminé par la relation

$$\theta = \frac{1}{2k}\log\frac{\operatorname{tang}\Theta + \operatorname{tang}\Delta}{\operatorname{tang}\Theta - \operatorname{tang}\Delta}.$$

Il s'ensuit de là que tout point de rencontre idéal de deux droites peut être considéré comme le point de rencontre idéal de deux droites quelconques perpendiculaires à une même droite. Le point idéal où concourent toutes les perpendiculaires à une même droite (et qui est à la distance

$i\frac{\pi}{2k}$ de tous les points de cette droite) sera dit le *pôle* de cette droite.

Si, dans les formules précédentes, on suppose la constante $k = 0$, l'équation (6) se réduisant à

$$\frac{\theta}{\operatorname{tang}\Theta} = \frac{\frac{1}{2}mn}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{MN}},$$

il est évident que l'angle de parallélisme sera droit, quelle que soit la distance du point p à la droite L. Dans cette hypothèse, toutes les droites menées par p rencontrent L à une distance finie, à l'exception des *deux parallèles qui coïncident en une seule*, et qui rencontrent L en *deux points coïncidant à l'infini*. On a ainsi la conception fondamentale de la théorie des parallèles d'Euclide.

Les deux théories des parallèles, de Lobatcheffsky et d'Euclide, correspondent à deux manières différentes dont on peut concevoir la ligne droite relativement à ses points à l'infini. Suivant Lobatcheffsky, la ligne droite, à partir d'un quelconque de ses points o, s'étend à l'infini de part et d'autre de o; mais ses deux points à l'infini, des deux côtés opposés de o, sont distincts l'un de l'autre, de telle sorte que l'on ne pourra passer, sur la droite, d'un côté de o à l'autre, si l'on ne passe par o, dans *l'étendue finie* de la droite (c'est-à-dire, si l'on ne va des valeurs positives aux valeurs négatives de la distance z d'un point p de la droite au point o, en passant par zéro), ou bien si l'on ne traverse *une étendue idéale de la droite au delà de l'infini* (en faisant passer z par des valeurs imaginaires). Suivant Euclide, au contraire, la ligne droite s'étendant encore à l'infini de part et d'autre d'un quelconque de ses points o, ses points à l'infini, des deux côtés opposés de o, *coïncident* entre eux, ce qui revient à

dire que la ligne droite est *une ligne indéfinie, rentrante en elle-même ;* de sorte que l'on pourra se transporter, sur la droite, d'un côté de o à l'autre, en passant soit par o, soit par le point de la droite situé à l'infini (c'est-à-dire que l'on ira des valeurs positives aux valeurs négatives de z, en passant soit par zéro, soit par ∞).

Si l'on considère maintenant, autour d'un point, le système des droites ω situées dans un plan P, et le système des plans Ω passant par ces droites et par une droite l, on aura, d'une manière analogue à l'équation (5), la relation

$$\frac{\sin m\omega}{\sin \omega n} = \lambda \frac{\sin \mathrm{M}\Omega}{\sin \Omega \mathrm{N}};$$

et, en supposant les droites m et n également inclinées sur la droite o d'intersection du plan P avec le plan O, mené par la droite l perpendiculairement à P, et par suite les plans M et N également inclinés sur le plan O, on aura, par analogie avec l'équation (6),

$$\frac{\operatorname{tang} \theta}{\operatorname{tang} \Theta} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} mn}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{MN}} = \text{const.}$$

Tandis que ω tourne dans le plan P, à partir de o, dans le sens positif ou dans le sens négatif, tang θ prend toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $+\infty$ ou à $-\infty$; il en sera donc de même pour tang Θ. Donc, dans ce cas, il n'y a plus lieu de faire les mêmes remarques que ci-dessus au sujet de la distance finie, infinie ou idéale de Ω à P. Nous observerons seulement qu'en déterminant l'angle Δ par l'équation

$$\operatorname{tang} \Delta = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{MN}}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} mn}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} \theta = \frac{\operatorname{tang} \Theta}{\operatorname{tang} \Delta},$$

l'angle Δ sera une fonction de l'angle δ, compris entre la droite l et le plan P, de sorte qu'on aura entre Δ et δ une relation de la forme

$$\cot\Delta = \varphi(\delta).$$

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 548

(voir t. XIX, p. 406);

PAR M. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée royal d'Arlon (Belgique).

Une conique passant par trois points A_1, A_2, A_3 *touche une droite* B. *Appelons* δ_1, δ_2, δ_3 *les distances respectives de ces trois points à la droite* B; ρ_1, ρ_2, ρ_3 *leurs distances au foyer* F, *et* a_1, a_2, a_3 *leurs distances mutuelles. On a la relation*

$$(1)\left\{\begin{aligned}&\delta_1^{\frac{1}{2}}[(\rho_2-\rho_3)^2-a_1^2]^{\frac{1}{2}}+\delta_2^{\frac{1}{2}}[(\rho_3-\rho_1)^2-a_2^2]^{\frac{1}{2}}\\&\qquad+\delta_3^{\frac{1}{2}}[(\rho_1-\rho_2)^2-a_3^2]^{\frac{1}{2}}=0\quad(*).\end{aligned}\right.$$

(Capitaine FAURE.)

Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des trois points A_1, A_2, A_3 rapportées à des axes rectangulaires quelconques passant par le foyer F. Désignons

(*) L'équation (1) présentait une faute d'impression que le défaut d'homogénéité faisait facilement découvrir.



par X_r, Y_r, Z_r les dérivées du déterminant

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \text{où} \quad z_1 = z_2 = z_3 = 1,$$

prises par rapport aux éléments x_r, y_r, z_r, et posons (*)

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = xX_1 + yY_1 + zZ_1, \\ \alpha_2 = xX_2 + yY_2 + zZ_2, \quad \text{où} \quad z = 1. \\ \alpha_3 = xX_3 + yY_3 + zZ_3, \end{cases}$$

Les équations des droites A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 seront

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$

et celle de B peut être supposée sous la forme

$$M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3 = 0.$$

Comme le premier membre de cette dernière se réduit à $2M_1S$, $2M_2S$, $2M_3S$ quand on y remplace les coordonnées courantes par celles des points A_1, A_2, A_3, les coefficients M_1, M_2, M_3 sont proportionnels aux distances de ces points à la droite B, et l'équation de celle-ci peut aussi s'écrire

$$(3) \qquad \delta_1\alpha_1 + \delta_2\alpha_2 + \delta_3\alpha_3 = 0.$$

Une conique circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$ peut être représentée par

$$(4) \qquad N_1\alpha_2\alpha_3 + N_2\alpha_3\alpha_1 + N_3\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

(*) Les quantités α_1, α_2, α_3 représentent, au signe près, les doubles des surfaces des triangles MA_2A_3, MA_3A_1, MA_1A_2, où M est supposé un point variable $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$. Elles constituent un système de coordonnées trilitères qui est très-utile dans une foule de questions, parce qu'on en peut passer facilement aux coordonnées cartésiennes, et *vice versa*. Aux sommets du triangle de référence, deux de ces coordonnées sont nulles et la troisième est égale à $2S$.

et la condition (*) de toucher B sera

$$\Sigma N_1^2 \delta_1^2 - 2\Sigma N_1 N_2 \delta_1 \delta_2 = 0,$$

ou, plus simplement,

(5) $$\sqrt{N_1 \delta_1} + \sqrt{N_2 \delta_2} + \sqrt{N_3 \delta_3} = 0.$$

Nous déterminerons les paramètres N_1, N_2, N_3 en identifiant l'équation (4) avec l'équation focale

$$x^2 + y^2 = (mx + ny + hz)^2.$$

Pour cela, on peut tirer x, y, z des équations (2), ce qui donne

$$x = \frac{\Sigma \alpha_1 x_1}{2S}, \quad y = \frac{\Sigma \alpha_1 y_1}{2S}, \quad z = \frac{\Sigma \alpha_1 z_1}{2S},$$

et l'équation focale peut prendre la forme

(6) $$\Sigma^2 \alpha_1 x_1 + \Sigma^2 \alpha_1 y_1 = \Sigma^2 \alpha_1 (mx_1 + ny_1 + hz_1),$$

ou

$$\Sigma \alpha_1^2 [x_1^2 + y_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2]$$
$$+ 2\Sigma \alpha_1 \alpha_2 [x_1 x_2 + y_1 y_2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)(mx_2 + ny_2 + hz_2)] = 0.$$

On en conclut

(7) $$0 = x_1^2 + y_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2, \ldots,$$

(8) $$\begin{cases} N_1 = 2(x_2 x_3 + y_2 y_3) \\ \qquad - 2(mx_2 + ny_2 + hz_2)(mx_3 + ny_3 + hz_3), \ldots, \end{cases}$$

Les équations (7) donnent

$$mx_1 + ny_1 + hz_1 = \rho_1, \ldots,$$

et comme l'on a aussi

$$a_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2(x_2 x_3 + y_2 y_3), \ldots,$$

(*) Cette condition peut s'obtenir en éliminant, par exemple, α_3 entre les équations (3) et (4) et en exprimant que le premier membre de la résultante est un carré parfait en α_1 et α_2.

ou

$$2(x_2 x_3 + y_2 y_3) = \rho_2^2 + \rho_3^2 - a_1^2, \ldots,$$

on trouve pour les valeurs de N

$$N_1 = (\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2, \ldots,$$

et par suite l'équation (5) devient (*)

$$\Sigma \sqrt{\delta_1 [(\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2]} = 0.$$

C. Q. F. D.

En supposant la conique conjuguée au triangle $A_1 A_2 A_3$, les équations (4), (5), (7) et (8) seront remplacées par le suivantes :

(4') $$P_1 \alpha_1^2 + P_2 \alpha_2^2 + P_3 \alpha_3^2 = 0,$$

(5') $$\frac{\delta_1^2}{P_1} + \frac{\delta_2^2}{P_2} + \frac{\delta_3^2}{P_3} = 0,$$

(7') $$P_1 = \rho_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2, \ldots,$$

(8') $$0 = \rho_{12} - (mx_1 + ny_1 + hz_1)(mx_2 + ny_2 + hz_2),$$

où l'on a posé $\rho_{12} = x_1 x_2 + y_1 y_2, \ldots.$

En résolvant les équations (8') par rapport aux trinômes $mx_1 + ny_1 + hz_1, \ldots,$ et en portant les valeurs obtenues dans les égalités (7'), on aura

$$P_1 = \rho_1^2 - \frac{\rho_{12}\rho_{13}}{\rho_{23}}, \ldots.$$

La règle de multiplication des déterminants fait voir que

$$P_1 = \frac{1}{\rho_{23}} \begin{vmatrix} x_1 x_1 + y_1 y_1 & x_1 x_3 + y_1 y_3 \\ x_2 x_1 + y_2 y_1 & x_2 x_3 + y_2 y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho_{23}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

(*) On sait qu'il existe quatre coniques passant par trois points donnés et ayant un foyer donné. Ici ces coniques sont caractérisées par les signes qu'il faut attribuer aux quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3. Il faut supposer ces trois quantités positives, ou deux positives et la troisième négative.

ou

$$P_1 = -\frac{Z_2 Z_3}{\rho_{23}}, \ldots.$$

Par suite, l'équation (5') donne

(1') $\qquad \Sigma \delta_1^2 Z_1 \rho_{23} = 0 \quad$ ou $\quad \Sigma \delta_1^2 Z_1 (\rho_2^2 + \rho_3^2 - a_1^2) = 0.$

En remarquant que les triangles $A_2 F A_3, \ldots,$ donnent

$$a_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2\rho_2\rho_3 \cos\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right), \ldots,$$

$$Z_1 = 2 \text{ fois surface } A_2 F A_3 = \rho_2\rho_3 \sin\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right), \ldots.$$

la relation (1') peut aussi se mettre sous la forme

$$\Sigma \frac{\delta_1^2}{\rho_1^2} \sin 2\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right) = 0.$$

Les équations (4) et (4'), où l'on remplace N et P par leurs valeurs, donnent aussi lieu aux propositions suivantes :

Une conique circonscrite ou conjuguée à un triangle $A_1 A_2 A_3$ *passe par un point* A. *Appelons* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *les doubles des aires des triangles* AA_2A_3, AA_3A_1, AA_1A_2; ρ_1, ρ_2, ρ_3 *les distances des points* A_1, A_2, A_3 *au foyer* F, *et* a_1, a_2, a_3 *les côtés du triangle* $A_1 A_2 A_3$. *On a les relations*

$$\frac{(\rho_2-\rho_3)^2 - a_1^2}{\alpha_1} + \frac{(\rho_3-\rho_1)^2 - a_2^2}{\alpha_2} + \frac{(\rho_1-\rho_2)^2 - a_3^2}{\alpha_3} = 0,$$

$$\frac{\rho_1^2\alpha_1^2}{\sin 2\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right)} + \frac{\rho_2^2\alpha_2^2}{\sin 2\left(\widehat{\rho_3, \rho_1}\right)} + \frac{\rho_3^2\alpha_3^2}{\sin 2\left(\widehat{\rho_1, \rho_2}\right)} = 0.$$

Supposons enfin la conique inscrite au triangle

$A_1 A_2 A_3$. On peut la représenter par l'équation

$$(4'') \quad \begin{cases} K_1^2 \alpha_1^2 + K_2^2 \alpha_2^2 + K_3^2 \alpha_3^2 \\ \quad - 2 K_1 K_2 \alpha_1 \alpha_2 - K_2 K_3 \alpha_2 \alpha_3 - 2 K_3 K_1 \alpha_3 \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

ou, plus simplement, par

$$\sqrt{K_1 \alpha_1} + \sqrt{K_2 \alpha_2} + \sqrt{K_3 \alpha_3} = 0,$$

et la condition de toucher la droite $\delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3 = 0$ est

$$(5'') \qquad \frac{K_1}{\delta_1} + \frac{K_2}{\delta_2} + \frac{K_3}{\delta_3} = 0.$$

Les coefficients K_1, K_2, K_3 pourraient encore s'obtenir en identifiant les équations (4″) et (6). Mais on les détermine plus facilement en exprimant que la conique (4″) touche les droites imaginaires menées par le foyer

$$x \pm y \sqrt{-1} = 0.$$

Comme cette dernière équation, par la substitution $x = \frac{\Sigma \alpha_1 x_1}{2S}$, $y = \frac{\Sigma \alpha_1 y_1}{2S}$, devient

$$\Sigma \alpha_1 (x_1 \pm y_1 \sqrt{-1}) = 0,$$

il suffira de remplacer dans l'équation (5″) δ_1, δ_2, δ_3 par $x_1 \pm y_1 \sqrt{-1}$, $x_2 \pm y_2 \sqrt{-1}$, $x_3 \pm y_3 \sqrt{-1}$. En chassant les dénominateurs et en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on aura

$$\Sigma K_1 (x_2 x_3 - y_2 y_3) = 0, \quad \Sigma K_1 (x_2 y_3 + x_3 y_2) = 0.$$

Par conséquent K_1, K_2, K_3 sont proportionnels aux mineurs du système d'éléments

$$\begin{vmatrix} x_2 x_3 - y_2 y_3 & x_3 x_1 - y_3 y_1 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_2 y_3 + x_3 y_2 & x_3 y_1 + x_1 y_3 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{vmatrix};$$

mais

$$\begin{vmatrix} x_3 x_1 - y_3 y_1 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\rho_1^2 Z_1, \text{ etc.},$$

on peut donc écrire

$$A_1 = \rho_1^2 Z_1 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \times \rho_1 \sin\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right), \quad A_2 = \ldots,$$

et les relations entre le foyer d'une conique inscrite au triangle $A_1 A_2 A_3$ et un point ou une tangente quelconques de cette courbe seront

$$\Sigma \sqrt{\rho_1^2 Z_1 \alpha_1} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{\rho_1^2 Z_1}{\delta_1} = 0$$

ou

$$\Sigma \sqrt{\rho_1 \alpha_1 \sin\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right)} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{\rho_1 \sin\left(\widehat{\rho_2, \rho_3}\right)}{\delta_1} = 0.$$

Question 811

(voir 2e série, t. VI, p. 240);

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

Nommons S *un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de* $(1-x)^i$, *où l'exposant* i *est négatif, ou bien un groupe quelconque de termes consécutifs à coefficients positifs dans le développement de* $(1+x)^i$, *où* i *est positif; écrivons* S *sous la forme* $x^k \sum$, $\sum$ *sera ou une quantité qui ne change jamais son signe quel que soit* x, *ou une telle quantité multipliée par un binôme du premier degré.*

La même proposition aura lieu pour un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de l'exponentielle e^x. (SYLVESTER.)

Considérons le développement de $(1-x)^i$, où i est égal à $-j$, j étant positif :

$$1+jx+\frac{j(j+1)}{1.2}x^2+\frac{j(j+1)(j+2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Et soit :

$$\begin{aligned}S=&\frac{j(j+1)(j+2)\ldots(j+k-1)}{1.2.3\ldots(k-1)k}x^k+\ldots\\&+\frac{j(j+1)(j+2)\ldots(j+k+n-1)}{1.2.3\ldots(k+n)}x^{k+n}.\end{aligned}$$

L'équation $S=0$, a k racines nulles, et n différentes de o. Il s'agit de démontrer que parmi ces n dernières, il y en a au plus une réelle. La $k^{ième}$ dérivée de S est

$$\begin{aligned}j(j+1)\ldots(j+k-1)\Big[&1+\frac{j+k}{1}x+\frac{(j+k)(j+k+1)}{1.2}x^2+\ldots\\&+\frac{(j+k)(j+k+1)\ldots(j+k+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}x^n\Big].\end{aligned}$$

Cette dérivée égalée à o, a n ou $(n-1)$ racines imaginaires suivant que n est pair ou impair (*Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. V, p. 520). Une équation a autant de racines imaginaires qu'une quelconque de ses dérivées ; par conséquent, parmi les n racines de $S=0$, différentes de o, il y en a au plus une qui soit réelle.

C. Q. F. D.

Par un raisonnement identique on voit que la même proposition s'applique au développement de e^x, et à celui de $(1+x)^i$, arrêté au premier terme à coefficient négatif.

Note. — M. Ledoux, élève du lycée de Douai, a résolu la même question à peu près de la même manière.

MÉTHODE D'HUYGHENS POUR CALCULER LES LOGARITHMES DES NOMBRES.

Communiquée à l'Académie des Sciences par M. Bertrand dans la séance du 23 mars 1868.

M. Bertrand présente à l'Académie une méthode pour calculer les logarithmes des nombres qui, due à Huyghens et communiquée par lui en 1666 dans l'une des premières séances de l'Académie des Sciences, est restée jusqu'ici inédite. Les indications suivantes, textuellement copiées sur les procès-verbaux conservés au Secrétariat, lui paraissent offrir un double intérêt. La méthode est remarquable et élégante en elle-même, et la démonstration que Huyghens ne donne pas paraît difficile à faire sans recourir à la série logarithmique de Mercator, publiée seulement en 1668, et présentée à cette date par Huyghens lui-même dans l'une des séances de l'Académie.

Règle pour trouver les logarithmes (1).

« Le calcul suivant cette règle est beaucoup plus court que par celle dont on s'est servy jusques icy, et pour faire voir la différence il faut seulement remarquer que pour trouver par exemple le logarithme de 2 jusques à dix chiffres vrais, il fallait extraire environ quarante fois la racine carrée d'un nombre de 64 chiffres, là où, par la présente règle pour avoir le mesme logarithme, il ne faut qu'extraire six fois la racine carrée d'un nombre

(*) Extrait des *Registres des procès-verbaux*, t. I, p. 40; 1666.

de 28 chiffres et faire ensuite trois divisions et une multiplication. La règle est celle-cy.

» Il faut avoir une fois pour tout les racines carrées du nombre 10 extraites consécutivement jusques à la sixième, et chaque racine de 14 chiffres, et si on désire avoir les logarithmes jusqu'à 10 charactères véritables, ou jusqu'à la septième ou huitième racine et davantage (et quant et quand de plus de chiffres) si l'on les veut encore plus précisément. Ainsy la racine cinquième extraite de 10 est 10 746 078 283 213, qui soit appelée a.

» La racine sixième est 10 366 329 284 377, qui soit b.

» L'unité 10 000 000 000 000, soit d (c'est-à-dire étant multipliée par 10^{13} comme sont généralement les racines pour faire en aller les fractions).

» Maintenant il faut trouver un nombre égal à

$$\frac{200da}{3d + 3a + 4b} + 40b - 3a - 3d,$$

lequel nombre est icy

559 661 035 184 532;

on le multipliera par $a - d$, dont le produit sera

4 175 509 443 116 778,

dont il sera assez de prendre les premiers charactères; et il faut noter que ce nombre une fois trouvé servira ensuite aux calculs de tous les logarithmes.

» Soit proposé de trouver le logarithme de 2; il faut avoir semblablement la cinquième et la sixième racine extraite de 2 en 14 chiffres, comme auparavant du nombre 10.

» La cinquième racine de 2 est 102 189 171 486 541, qui soit dite f.

» La sixième racine de 2 est 10 108 892 860 517, qui soit dite g.

» Et l'unité comme devant 10 000 000 000 000, soit d.

» Il faut après trouver un nombre égal à

$$\frac{200\,df}{3d+3f+4g}+40g-3f-3d,$$

lequel nombre est icy

545 869 542 830 178;

on le multipliera par $a-\frac{ad}{f}$, et le produit sera

1 256 953 589 206.

Maintenant, comme le nombre dessus trouvé 41 755... à celuy-cy 12 565... Ainsy sera le logarithme de 10, à scavoir 10 000..., au logarithme de 2, qui sera

0,301 029 995 67,

où il y a dix charactères vrais et le onziesme qui surpasse le vray de l'unité.

» L'on sait qu'il faut mettre un zéro pour charactéristique, à cause que le nombre 2 est au-dessous de 10.

» Or, pour trouver le logarithme d'un nombre au-dessus de 10, il faut tant de fois extraire la racine carrée que la dernière extraite soit moindre que la racine sixième extraite de 10, c'est-à-dire aux nombres depuis 1 jusqu'à 100 il faudra extraire sept fois, depuis 100 jusqu'à 10 000 huit fois, depuis 10 000 jusqu'à 100 000 000 neuf fois; et en se servant des deux racines dernières et les appelant f et g et opérant comme dessus, on aura le logarithme de la racine qui est la septième en comptant la dernière en arrière, et cela aussi précisément que nous avons trouvé le logarithme de 2, c'est-à-dire jusqu'à 10

characteres vrais. Doublant après ce logarithme trouvé, l'on aura celuy du nombre proposé, si l'on n'a fait que 7 extractions; en doublant encore une fois, si l'on en a fait 8; et, encore une fois, si l'on en fait 9. »

BIBLIOGRAPHIE.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

JACOB STEINER'S *Vorlesungen über synthetische Geometrie*. LEÇONS DE J. STEINER SUR LA GÉOMETRIE SYNTHÉTIQUE. — Première Partie : *Théorie élémentaire des Sections coniques*, rédigée par C.-F. GEISER, professeur à l'École Polytechnique de Zurich. — Seconde Partie : *Théorie des Sections coniques fondée sur les Propriétés projectives*, rédigée par H. SCHRÖTER, professeur à l'Université de Breslau; 2 vol. in-8° de 200-564 pages, avec figures dans le texte. Leipzig, Teubner, 1867.

Ces deux volumes ont été composés d'après les Leçons et les manuscrits du célèbre géomètre. Il nous suffira d'en indiquer succinctement le contenu pour en faire apprécier l'intérêt.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction. — I. Le cercle (Puissance d'un point. Ligne et point d'égale puissance. Points de similitude. Théorème de Pascal. Points et rayons harmoniques. Pôle et polaire). — II. Le lieu géométrique (Définition et exemples. Ellipse, parabole et hyperbole. Origine commune des sections coniques).

Étude spéciale des sections coniques. — III. L'ellipse (Génération tangentielle. Relation entre deux ou plusieurs tangentes à l'ellipse. Normale. Parallélogramme circonscrit. Diamètres con-

jugués, axes. Constructions. Équation). — IV. L'hyperbole (Génération par des points ou des tangentes. Relations entre deux ou plusieurs tangentes. Asymptotes, diamètres conjugués. Équation). — V. La parabole (Propriétés des points et des tangentes. Relations entre deux tangentes. Trilatère et quadrilatère circonscrits. Nouvelles propriétés de la parabole et de ses tangentes. Quadrature).

Étude commune des sections coniques. — VI. Propriétés focales des coniques (Construction des coniques au moyen d'éléments donnés. Figure polaire du cercle. Cône droit). — VII. La section conique comme projection du cercle (Cercle et conique dans un cône droit. Théorèmes de Pascal et de Brianchon. Propriétés polaires des coniques. Faisceaux de coniques et systèmes de coniques).

On voit par ce sommaire combien de théories importantes sont développées dans ce mince volume, ce qui n'a rien d'étonnant pour ceux qui connaissent la simplicité et la puissance des procédés de démonstration de Steiner. C'est naturellement cette première Partie qui rentre le plus directement dans le cercle d'études des candidats à nos écoles. Nous ne saurions en recommander trop vivement la lecture à ceux d'entre eux qui ne veulent pas s'astreindre étroitement à la lettre des programmes, et qui veulent se préparer à étudier plus tard les travaux des Poncelet et des Chasles.

SECONDE PARTIE.

Nous donnerons sur la seconde Partie des indications plus abrégées, mais qui suffiront pour attirer l'attention de ceux qui cultivent la haute Géométrie. Dans la préface de son ouvrage intitulé *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit der geometrischen Gebilde von einander*, et dont le premier volume, le seul qui ait été publié, a paru en 1832, Steiner expose le plan d'un grand ouvrage, devant se diviser en cinq Parties, dont ce volume formait la première. Ce plan n'a pas été réalisé. Cependant de nombreux matériaux relatifs aux théories que devait comprendre la cinquième Partie ont été amassés par l'auteur,

qui les a fait connaître, soit dans le *Journal de Crelle*, soit dans les *Annales de Gergonne*, soit surtout dans ses Leçons professées à l'Université de Berlin. Ces Leçons, suivies par un nombre restreint d'élèves, risquaient de tomber dans l'oubli, au grand détriment des méthodes synthétiques, menacées par l'envahissement des puissantes théories analytiques modernes, lorsque le Dr Schröter a entrepris la publication du Cours auquel il avait assisté dans l'hiver de 1852-53.

Grâce au concours du Dr Geiser, neveu de Steiner, et qui s'était chargé lui-même de la publication de la partie élémentaire, M. Schröter a pu profiter des manuscrits du grand géomètre, dont ses notes de Cours l'ont aidé à combler les lacunes.

Indiquons maintenant les titres des chapitres de cet ouvrage:

Relations projectives des séries rectilignes de points et des faisceaux plans. — Génération des coniques par des figures projectives. — Faisceaux et systèmes de coniques. — Réseau d'involution (système polaire).

Ajoutons que ces volumes, comme tous ceux qui sortent des presses de M. Teubner, sont remarquables par la netteté de leur exécution typographique.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, par *M. Lionnet*, Examinateur de la Marine, Officier de l'Instruction publique, Chevalier de la Légion d'honneur, Agrégé de l'Université, ancien Professeur de Mathématiques élémentaires au Lycée Louis-le-Grand. — Paris, 1868. Librairie de Gauthier-Villars. — Prix : 4 francs.

M. Lionnet a consacré sa vie à l'amélioration de l'enseignement si important des mathématiques élémentaires. Il est l'auteur de plusieurs démonstrations simples et de solutions élégantes, qui ont successivement paru dans les ouvrages qu'il a publiés et sont maintenant professées dans tous les cours et reproduites dans les meilleurs traités élémentaires. Il fait paraître aujourd'hui, à la librairie de M. Gauthier-Villars, la troi-

sième édition de son Traité d'Algèbre, enrichi de parties entièrement nouvelles.

Cet ouvrage présente avec tous les développements nécessaires les théories algébriques exigées des canditats au baccalauréat ès sciences, à l'École de Saint-Cyr et aux Écoles Centrale et Navale. La partie classique est imprimée en gros caractères, et conforme à l'ordre généralement adopté dans les programmes officiels. Nous signalerons particulièrement dans ces matières à l'attention des professeurs et des élèves les passages suivants :

1° La théorie des quantités négatives (nos 84 à 94);

2° Les exemples qui font voir que l'impossibilité d'un problème peut, dans certains cas, être indiquée par une valeur positive, entière ou fractionnaire de l'inconnue (nos 105 à 107);

3° Toute la théorie élémentaire des maxima et des minima, très-complète et très-bien traitée; la remarque ingénieuse du n° 156, et les problèmes 39 et 40 du livre III (p. 192).

Mais l'ouvrage contient en outre, imprimés en petit texte, un grand nombre de théories intéressantes et de problèmes difficiles et bien choisis, dont la plupart sont accompagnés de solutions remarquables par leur simplicité. Dans cette partie du volume nous mentionnerons spécialement :

1° L'exposition des principes de la Théorie des Probabilités;

2° La limite du nombre des divisions à faire pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers (nos 267 à 270);

3° Les théorèmes concernant les diviseurs des nombres entiers (nos 271 à 280) : la plus grande partie de ce chapitre et tout le précédent appartiennent en propre à l'auteur;

4° Les questions relatives aux nombres premiers et premiers entre eux (nos 286 à 309) : ce chapitre étendu constitue un travail original, où l'on trouve plusieurs démonstrations élémentaires et nouvelles des principes fondamentaux de la théorie des nombres.

Nous ferons encore observer que les nombreux exercices dont les énoncés se trouvent à la fin de chaque livre sont accompagnés de leurs solutions numériques, ce qui sera cer-

tainement très-avantageux pour les professeurs et pour les élèves.

Enfin, nous ne terminerons pas sans parler de la rédaction claire et succincte particulière à l'auteur; on voit que chaque phrase de ce travail excellent et consciencieux a souvent été remise sur le métier; aussi peut-on citer à bon droit la plupart des énoncés comme des modèles de *rigueur* et de précision mathématiques.

GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur de Mathématiques.

QUESTIONS.

866. Les différents points d'une courbe mobile engendrent une série de courbes dont l'enveloppe est la même que l'enveloppe de la courbe mobile. Exemple : l'enveloppe d'une droite de longueur constante, qui se meut entre deux droites rectangulaires est la même que celle des ellipses engendrées par chacun des points de la droite mobile.

Le théorème général ne suppose pas que la courbe mobile ne se déforme pas pendant le mouvement.

(E. BARBIER.)

867. A une hyperbole on mène deux tangentes (A) et (B), la corde des contacts est (C); d'un point quelconque m de la courbe on mène ensuite une parallèle à une asymptote, et l'on désigne par a, b, c les points de rencontre de cette parallèle avec les droites (A), (B), (C). Démontrer que mc est moyenne proportionnelle entre ma et mb.

Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, deux tangentes et un point.

(G.).

868. Un triangle est inscrit dans une circonférence. On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque A de la circonférence sur les trois côtés du triangle sont en ligne droite.

Trouver l'enveloppe de cette ligne, quand le point A se déplace sur la circonférence. (DE TEYSSIÈRE.)

869. Si l'on pose

$$f_m(x) = 1 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 x^2 + \ldots$$
$$+ \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\right]^2 x^n + \ldots + x^m:$$

1° Les équations

$$f_1(x) = 0 \quad f_2(x) = 0 \ldots f_m(x) = 0$$

auront toutes leurs racines réelles et inégales;

2° Les racines de l'équation $f_m(x) = 0$ sépareront les racines de l'équation $f_{m+1}(x) = 0$. (H. LAURENT.)

870. Lieu des centres de courbure principaux correspondants aux points d'une surface gauche qui sont situés sur une génératrice. (DARBOUX.)

871. Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse fixe et à toutes les hyperboles équilatères passant par les foyers de cette ellipse.

(DARBOUX.)

872. Deux droites qui divisent harmoniquement les trois diagonales d'un quadrilatère rencontrent en quatre points harmoniques toute conique inscrite dans le quadrilatère. (CREMONA, *The Educational Times.*)

873. Si par un point O on mène trois lignes respecti-

vement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique. Trouver son équation.

(S. Roberts, *The Educational Times*.)

874. On donne un cercle et deux points. Inscrire dans le cercle un triangle isocèle dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés. (Lemoine.)

875. Construisons deux ellipses P et P′ telles que les demi-axes de la première coïncident en direction avec ceux de la seconde, mais soient respectivement proportionnels à leurs carrés :

1° Le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres quelconques D_1 et D_2 de l'ellipse P vaut le parallélogramme construit sur les demi-axes de cette ellipse assemblés sous l'angle ζ que forment entre eux les conjugués respectifs de D_1 et D_2 dans l'ellipse P′;

2° Lorsque les diamètres D_1 et D_2 sont conjugués dans l'ellipse P, leurs conjugués respectifs dans l'ellipse P′ se coupent à angle droit;

3° Le secteur elliptique compris entre deux demi-diamètres D_1 et D_2 dans l'ellipse P, est proportionnel à l'angle ζ ou à la courbure de l'arc qu'ils interceptent sur l'ellipse P′;

4° Lorsqu'un point décrit une ellipse P par l'action d'une force dirigée vers son centre, le rayon vecteur conjugué, par rapport à l'ellipse P′, de celui qui passe par le point mobile, tourne autour du centre d'un mouvement uniforme;

5° Les perpendiculaires abaissées des extrémités de deux diamètres quelconques D_1 et D_2 de l'ellipse P sur les directions qui leur sont réciproquement conjuguées dans l'ellipse P′, sont égales entre elles;

6° Comment ces énoncés se modifient-ils pour l'hyperbole ?

(P. Gilbert, *Bulletin de la Société Philomathique*, 26 octobre 1867.)

876. 1020 étant le dénominateur d'une fraction irréductible, pourquoi le nombre des chiffres de la période engendrée par cette fraction sera-t-il l'un des nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32 ? (Lionnet, *Algèbre*, 3e édit.)

877. Lorsque la réduction d'une fraction $\frac{a}{b}$ en décimales conduit à une période de n chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur égale un multiple de b donne lieu à une période dont le nombre des chiffres égale un multiple de n. (*Idem.*)

878. Lorsque la conversion de plusieurs fractions irréductibles $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$ en décimales conduit à des périodes dont n, n', n''... sont les nombres de chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur est égal au plus petit commun multiple des dénominateurs b, b', b''... donne lieu à une période d'un nombre de chiffres égal au plus petit commun multiple des nombres n, n', n''... (*Idem.*)

879. Lorsque la conversion en décimales d'une fraction irréductible dont le dénominateur est un nombre premier p conduit à une période de n chiffres, et que p^α est la plus grande puissance de p qui divise $10^n - 1$, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur $p^{\alpha+\beta}$ conduit à une période de np^β chiffres. (*Idem.*)

880. P étant le produit des entiers inférieurs et premiers à un nombre N, la différence $P - 1$ est divisible par N lorsque N n'est ni premier, ni le double d'un

nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier impair, ni le double d'une telle puissance. (*Idem.*)

881. Lorsqu'un nombre premier est de la forme $1 + 2^n$, l'exposant n est nul ou de la forme 2^α. (*Idem.*)

Questions d'Arithmologie qui n'ont jamais été résolues.

882. La suite des nombres premiers 2, 3, 5, 17, 257,.. de la forme $1 + 2^n$ est-elle illimitée? Ou autrement, y a-t-il une infinité de nombres impairs par lesquels une circonférence peut être divisée en parties égales au moyen de la règle et du compas? (*Idem.*)

883. Tout nombre pair est-il la somme de deux nombres premiers impairs? (*Idem.*)

884. 8 et 9 sont-ils les seuls entiers consécutifs qui soient des puissances de nombres entiers? (*Idem.*)

885. Y a-t-il au moins deux nombres premiers parmi les entiers compris entre les carrés de deux entiers consécutifs? (*Idem.*)

886. Étant donnés deux cercles, si l'on prend les polaires de ces cercles par rapport à un cercle quelconque, on obtient deux coniques; les cercles qui ont pour diamètres les axes focaux de ces coniques se coupent sous le même angle que les cercles donnés. (H. Faure.)

887. Étant donnés deux cercles qui se coupent orthogonalement, si l'on fait passer un cercle par leurs centres et par leur point d'intersection, la somme des puissances d'un point de ce cercle par rapport aux cercles donnés est nulle. (*Idem.*)

———

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A LA GÉOMÉTRIE

(voir p. 208);

PAR M. ABEL TRANSON.

VIII.

Je rappellerai donc premièrement de quelle façon M. Poncelet a considéré les rencontres d'un cercle et d'une droite, ou plus généralement d'une section conique et d'une droite.

Si une conique est rencontrée aux points M et N par une droite indéfinie mn, on sait que le milieu ou centre O de la corde MN se trouve à l'intersection de cette droite et du diamètre AB conjugué à sa direction. Le rapport entre le carré de la demi-corde, c'est-à-dire entre $\overline{OM}^2$ ou $\overline{ON}^2$, et le produit des deux segments OA et OB du diamètre demeure le même lorsque, le point O se déplaçant sur AB, la sécante demeure parallèle à elle-même. Si p est la valeur de ce rapport, la relation

$$\overline{OM}^2 = p.OA.OB$$

définit donc la situation des points M et N.

Supposons maintenant une autre droite indéfinie $m'n$ parallèle à mn, mais ne rencontrant pas la conique. Elle rencontrera en un point O′ le diamètre AB prolongé. Sur cette droite $m'n'$, et de part et d'autre de O′, prenons deux points M′ et N′ satisfaisant à la relation

$$\overline{O'M'}^2 = \overline{O'N'}^2 = p.O'A.O'B$$

« identique avec celle qui définit les points M et N suivant lesquels la sécante *mn* rencontre réellement la section conique pourvu toutefois qu'on n'ait point égard à la différence de situation des lignes (*) ; on obtiendra une longueur M'N', divisée également au point O', et qu'on pourra regarder comme représentant, d'une manière fictive, la corde imaginaire qui correspond à la droite *m'n'* considérée comme sécante de la courbe. » (*Traité des propriétés projectives,* section I, chap. II.)

Le lieu des points M' et N' ainsi construits sera une hyperbole ou une ellipse, selon que la conique considérée sera, au contraire, une ellipse ou une hyperbole, et deux sections coniques ainsi conjuguées seront dites *supplémentaires* l'une de l'autre; enfin, il est bien essentiel de remarquer « qu'une même section conique a une infinité de supplémentaires, correspondant à l'infinité de systèmes de diamètres conjugués qui lui appartiennent. » (*Ibid.*)

Assurément voilà des grandeurs géométriques qui, en un certain sens, *représentent*, comme dit l'auteur, *les cordes imaginaires de la conique;* et les géomètres savent que de cette représentation M. Poncelet a tiré des solutions aussi faciles qu'élégantes de quelques-uns des problèmes les plus importants de la théorie des sections coniques; par exemple, la solution du problème très-important de transformer un système de deux coniques en un système de deux cercles. Mais la question est de savoir si cette représentation, très-utile dans une théorie particulière, a bien la généralité qu'il faut pour correspondre aux propriétés algorithmiques du symbole $a + b\sqrt{-1}$; par conséquent si elle est propre à *réaliser*

(*) Puisqu'en ayant égard à cette situation, l'un des deux segments du diamètre deviendrait négatif.

ce symbole; par conséquent si elle peut sous ce rapport entrer en comparaison avec la *théorie des nombres directifs*.

Or M. Poncelet construit la conique supplémentaire relative à un diamètre déterminé de la conique primitive en plaçant sur ce diamètre une suite d'ordonnées parallèles au diamètre qui lui est conjugué; variant ainsi à chaque fois, c'est-à-dire pour chaque conique supplémentaire, l'angle sous lequel il construit la grandeur qui est affectée du signe $\sqrt{-1}$; en un mot, accommodant la représentation de l'imaginaire aux conditions successives de son problème. D'ailleurs, l'auteur a donné sur ce point toute sa pensée dans son dernier ouvrage, en affirmant que « le coefficient algorithmique $\sqrt{-1}$ n'est point exclusivement le signe de la *perpendicularité*; mais qu'il peut aussi bien représenter l'obliquité des droites dirigées sous un angle d'inclinaison quelconque » (*Applications d'Analyse et de Géomètrie*; t. II, p. 244); et en avouant qu'il lui serait « bien difficile de s'expliquer rationnellement que M. Cauchy ait appuyé de son autorité une interprétation si exclusive du signe $\sqrt{-1}$ ». (*Ibid.*)

C'est, qu'eu égard à la théorie des sécantes idéales, M. Poncelet n'avait nullement à se préoccuper de la condition que doit remplir une grandeur géométrique pour être vraiment représentée par le symbole $\sqrt{-1}$, condition qui est de donner pour résultat l'unité négative -1 lorsqu'on la soumet à une opération équivalente à l'opération algébrique de l'élévation au carré; ni de la condition à remplir pour représenter une racine déterminée de l'unité, etc., etc.

Mais autant il serait déplacé de reprocher à la théorie des sécantes idéales l'absence de conditions qui s'y trou-

veraient sans objet, autant le serait-il de ne pas accepter ces mêmes conditions comme le *criterium* d'une théorie qui a la prétention de réaliser les symboles qu'on a jusqu'ici universellement attribués à l'imaginaire.

Aussi lorsque dans une récente critique du calcul directif, critique que fort inconsidérément on a voulu abriter sous l'autorité de M. Poncelet, on dit que la règle adoptée par les inventeurs de la nouvelle doctrine est de « représenter les grandeurs imaginaires par des perpendiculaires à l'axe sur lequel se comptent les grandeurs réelles » (*Les Mondes*, février 1868), on commet une première méprise, puisque précisément il s'agit de représenter les imaginaires par des longueurs *obliques* à cet axe, notamment toute grandeur imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ par l'hypoténuse du triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit les lignes a et b. Et ensuite lorsqu'on affirme (*ibid.*) qu'il n'y a « aucune importance » à placer la ligne b perpendiculairement à a, on commet une méprise plus grave encore; car supposons, par exemple, $a = b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; la quantité algébrique $a + b\sqrt{-1}$ est alors l'une des racines quatrièmes de l'unité négative, et la grandeur géométrique qui lui correspond selon la théorie en question, c'est un chemin égal à l'unité inclinée de 45 degrés sur la direction positive. En effet, cette unité inclinée, si on la multiplie trois fois par elle-même, tournera trois fois de 45 degrés dans le sens de la rotation directe, d'après le principe fondamental de la multiplication appliquée aux nombres directifs; et alors elle se trouvera couchée sur la direction négative, ce qui prouve bien que, dans sa situation première, elle est réellement une des racines quatrièmes de l'unité négative. Mais si l'on prétend qu'il n'y a « aucune importance » à diriger perpendiculairement le terme affecté du signe $\sqrt{-1}$, je

demande qu'on l'incline ici sous tel angle qu'on voudra autre que l'angle droit, et qu'ensuite on explique comment le troisième côté du triangle ou bien toute autre ligne de la figure pourra représenter la racine quatrième de l'unité!...

Le *principe de continuité* de M. Poncelet, autant que sa *théorie des sécantes idéales*, est absolument étranger à l'objet du calcul directif. En effet, lorsqu'une figure géométrique dans un état général de construction présente des parties qui peuvent généralement exister ou n'exister pas, il arrive que leur présence dans le premier cas peut servir à démontrer des propriétés permanentes de la figure, c'est-à-dire des propriétés qui subsistent lorsque ces mêmes parties n'existent pas; ou bien, au contraire, il peut arriver que les propriétés permanentes soient plus faciles à démontrer en l'absence des parties contingentes. Le *principe de continuité* consiste à admettre que la démonstration faite pour l'un des deux états de la figure est valable pour l'autre, et il y a sans doute quelque analogie entre cette manière d'envisager les relations d'une figure indépendamment de l'existence ou de la non-existence de quelques-unes de ses parties, et le maniement algébrique des équations, qui se fait de son côté indépendamment de la nature particulière de leurs racines. Mais enfin, le *principe de continuité* est de pure géométrie; il appelle *imaginaires* certaines parties des figures lorsque ces parties cessent d'exister, *cessent d'être réelles*. Au lieu que la théorie que j'expose ici (d'après Argand, etc.) est une théorie d'Algèbre qui a pour objet de faire voir que *toutes les racines des équations algébriques sont constructibles, c'est-à-dire réelles*.

Les théories de M. Poncelet étant mises ainsi hors de cause, je prie le lecteur de remarquer que, grâce au calcul directif, les règles concernant les quantités néga-

tives et celles qui concernent les quantités imaginaires se trouvent identifiées. Ainsi la multiplication entre nombres directifs ayant pour effet de faire tourner le multiplicande d'un angle égal à celui du multiplicateur, afin que le produit soit composé avec l'un des deux facteurs comme l'autre l'est avec l'unité, il s'ensuit nécessairement tout le détail de ce qu'on appelle *la règle des signes*, et par exemple que *moins par moins donne plus*. En effet, l'angle du multiplicateur *moins un*, étant de 180 degrés, il faut que l'angle du multiplicande *moins un*, qui est aussi de 180 degrés, s'augmente d'autant pour *donner* le produit, ce qui amène celui-ci à 360 degrés, c'est-à-dire à *plus un*. On a ainsi un produit dans la direction positive, c'est-à-dire un produit dirigé en sens contraire du multiplicande, parce que le multiplicateur est dirigé en sens contraire de l'unité (positive), c'est-à-dire un produit composé avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'unité; etc.

IX.

Maintenant il me reste à montrer que la réalisation des imaginaires proposée par Argand, Français, Mourey, bien loin d'être en contradiction avec l'emploi que M. Chasles a fait des imaginaires dans son *Traité de Géométrie supérieure*, conduit nécessairement aux mêmes résultats, mais à la vérité par une route différente.

Ceci nécessite quelques explications préliminaires.

Dans la *division homographique* d'une droite, il y a à considérer deux points, appelés *points doubles*, dont la détermination dépend d'une équation du second degré. Les racines de cette équation peuvent être réelles ou bien imaginaires, et par conséquent, selon l'idée généralement reçue, les points doubles peuvent *exister ou ne pas*

exister. Dans le premier cas, leurs relations avec les autres points de la figure permettent de démontrer plusieurs des propriétés les plus importantes de la division homographique, et dès lors, en vertu du *principe de continuité* proposé par M. Poncelet, on pourrait induire que ces propriétés subsistent dans le second cas, c'est-à-dire quand les racines de l'équation dont il s'agit sont imaginaires. Mais M. Chasles évite l'emploi de ce principe en établissant ces mêmes propriétés de la division homographique, non sur la réalité des deux points doubles, réalité qui constitue une circonstance *contingente* de la figure, mais sur des circonstances *absolues* et *permanentes*, c'est à savoir sur ce qu'il appelle les *éléments* de ces points, éléments représentés par les coefficients de l'équation du second degré dont ils dépendent, et par conséquent éléments toujours réels.

De cette méthode, dont l'emploi bien évidemment n'est pas restreint à la question que je viens d'indiquer, son auteur a pu dire avec vérité qu'*elle participe aux avantages propres à l'analyse* (*Géom. sup.*, préf., p. II). Elle possède en effet « la généralité dont sont empreints tous les résultats de la Géométrie analytique, où l'on ne fait acception, ni des *différences de positions relatives* des diverses parties d'une figure, ni des circonstances de *réalité* ou *d'imaginarité* des parties qui, dans la construction générale de la figure, peuvent être indifféremment réelles ou imaginaires ». (*Ibid.*)

Mais quoi! les résultats de cette méthode par rapport à la division homographique seront-ils amoindris? leur importance et leur beauté seront-elles diminuées, si l'on fait voir qu'en dépit du préjugé algébrique les points doubles existent encore lorsque les racines de l'équation dont ils dépendent ont la forme dite imaginaire? bien plus! si l'on fait voir que dans ce cas-là aussi bien que

dans celui des formes dites *réelles*, ils peuvent servir directement à démontrer les propriétés de la division homographique!

Je crois qu'au jugement de tout esprit droit cette épreuve sera décisive. A la vérité, pour l'accomplir entièrement, il faudrait montrer d'abord que les notions du rapport anharmonique et du rapport harmonique, celles de la division homographique et de l'involution, ne conviennent pas exclusivement à des points situés en ligne droite, mais s'étendent aussi à des points distribués sur un plan. Ceci offrirait l'occasion d'une importante application de l'algèbre directive; car toutes les relations que la *Géométrie supérieure* établit entre les segments d'une droite, les transformations qu'elle fait subir à ces relations et les théorèmes qu'elle en déduit; ces relations, ces transformations, ces théorèmes recevraient du calcul directif une interprétation concernant les chemins entre les points d'un même plan. Mais tandis que les théorèmes relatifs à des segments qui sont couchés tous sur une même droite ne peuvent résulter que du calcul, les théorèmes correspondants relatifs à des lignes polygonales, outre qu'ils se présenteraient, eux aussi, comme des résultats de calcul, seraient en même temps des *propriétés de figures*, et par conséquent seraient susceptibles d'acquérir par des démonstrations géométriques une évidence intuitive.

Quelque intérêt que puisse avoir la question envisagée ainsi dans son ensemble, comme son développement m'entraînerait dans de trop longs détails, je vais considérer certaines relations entre des points distribués sur un plan, mais en me restreignant aux notions indispensables pour établir la conclusion que j'ai en vue.

(§ 1). *Du rapport anharmonique de quatre points.*— Quatre points a, b, c, d, *situés sur un plan*, donnent

lieu à six chemins; l'expression $\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$, qui est formée de quatre de ces six chemins, est ce que nous appellerons le *rapport anharmonique* des quatre points; c'est *le rapport des distances de l'un de ces points à deux des autres, divisé par le rapport des distances du quatrième point à ces deux-là* (*G. S.*, 7)*.

Le lecteur doit entendre qu'un chemin comme *ac* est mesuré par un nombre directif qui implique à la fois, conformément à nos définitions, une longueur et un angle de direction. Si les points *a*, *b*,... sont déterminés par leurs distances à une origine O, un chemin tel que *ac* est la différence des nombres directifs O*c*, O*a*. Le rapport des deux chemins *ac*, *ad*, implique un angle que j'appelle ω_1 et qui est égal à la différence des inclinaisons de *ac* et de *ad* sur la direction positive. Pareillement ω_2 sera l'angle directeur du rapport $\frac{bc}{bd}$, c'est-à-dire la différence des inclinaisons de *bc* et de *bd*; de sorte que finalement le rapport anharmonique $\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd}$ aura un angle directeur ε égal à la différence $\omega_1 - \omega_2$.

D'après cela, c'est-à-dire à cause des angles qu'elles contiennent implicitement, nos formules, quoique identiques dans la forme avec celles de la *Géométrie supérieure*, en différeront essentiellement, à moins cependant qu'on ne remarque qu'entre des chemins situés sur une même droite les angles sont toujours de 0° ou de 180°, et que ces angles entre deux chemins sont marqués par les signes *plus* ou *moins* qui affectent leurs rapports.

(§ 2). *Des divisions homographiques.*—Si l'on a mar-

(*) Lisez : *Géométrie supérieure*, § 7. C'est ainsi que nous indiquerons la correspondance entre nos énoncés et les énoncés analogues du livre de M. Chasles.

qué *sur deux plans* des points qui se correspondent un à un, tellement que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de l'un soit égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de l'autre, nous dirons que ces deux plans sont divisés *homographiquement*, ou bien que leurs points correspondants forment deux *divisions homographiques* (*G. S.*, 99).

L'homographie des deux divisions est établie aussitôt qu'à trois points du premier plan déterminés par les nombres directifs a, b, c, on a fait correspondre trois points a', b', c', pris arbitrairement sur le second plan. Car en appelant x et y les deux nombres qui correspondent à deux nouveaux points homologues, on devra avoir la relation

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a'}{y-b'} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{c'-a'}{c'-b'},$$

équation qui détermine la situation d'un quatrième point y du second plan, lorsqu'un quatrième x est donné sur le premier. D'ailleurs, si après avoir développé cette équation, on y ramène le coefficient du terme en xy à l'unité, elle prend la forme

$$(1) \qquad xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0.$$

Or il est facile de voir que si l'on appelle x_1, x_2, x_3, x_4 les nombres directifs qui déterminent quatre points quelconques du premier plan, et y_1, y_2, y_3, y_4 les nombres relatifs à quatre points du second plan déterminés par l'équation ci-dessus, le rapport anharmonique

$$\frac{y_1-y_2}{y_1-y_4} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_4}$$

des quatre derniers est égal au rapport anharmonique des quatre premiers.

L'équation (1) est la même que celle de la *G. S.*, 131, avec la différence qu'ici x et y mesurent des chemins inclinés, et que les coefficients λ, μ, ν, ne sont pas nécessairement des quantités de la forme dite *réelle*. Ce sont des nombres directifs quelconques; ils peuvent donc avoir la forme dite *imaginaire*.

Sans diminuer la généralité de cette conception, nous pouvons supposer que les deux plans coïncident; ou en d'autres termes, nous pouvons considérer sur un même plan deux systèmes de points se correspondant un à un de manière à y former deux divisions anharmoniques. L'équation (1) représente alors une transformation algébrique dont nous définirons facilement la nature en faisant préalablement disparaître les termes du premier degré, et cela en portant l'origine des x au bout du chemin $-\mu$, et l'origine des y au bout du chemin $-\lambda$. La relation entre les nouveaux x et y sera alors

$$(2) \qquad xy = \lambda\mu - \nu.$$

Et maintenant, si l'on fait glisser sur le plan sans tourner l'une des deux divisions, par exemple celle des y, de manière que son origine vienne coïncider avec celle des x, l'équation (2) subsistera et sera très-facile à interpréter par les principes du calcul directif; car premièrement les chemins correspondants x et y seront inclinés également de part et d'autre du chemin marqué par $\lambda\mu - \nu$; et comme le produit de leurs longueurs est constant, si l'on fait tourner l'une des deux divisions autour de la direction de $\lambda\mu - \nu$ jusqu'à la rabattre sur l'autre, deux chemins correspondants quelconques seront alors deux *rayons vecteurs réciproques*.

(§ 3). *Détermination géométrique des constantes λ, μ, ν.* — La signification des coefficients de l'équation (1)

se détermine comme dans la théorie relative aux divisions homographiques d'une droite.

O étant l'origine commune des x et des y, soit OI le chemin qui, dans le système des x, correspond à une valeur infinie de y ; et soit OJ′ le chemin qui, dans le système des y, correspond à une valeur infinie de x, on trouvera

$$OI + \mu = 0 \quad \text{et} \quad OJ' + \lambda = 0.$$

Ensuite, si OA′ est la valeur de y qui correspond à l'origine O considérée comme appartenant au système des x, c'est-à-dire la valeur de y correspondant à $x = 0$; et de même, si OB est la valeur de x correspondant à $y = 0$, on trouvera indifféremment

$$\nu = OI.OA'; \quad \text{ou bien} \quad \nu = OJ'.OB.$$

L'équation (1) devient alors la suivante (*G. S.*, 136) :

$$xy - OJ'.x - OI.y + OI.OA' \text{ (ou } OJ'.OB) = 0.$$

(§ 4). Détermination des POINTS DOUBLES. — *Lorsque deux plans divisés homographiquement sont superposés, il existe deux points dont chacun, considéré comme appartenant à l'une des divisions, coïncide avec son homologue dans l'autre division.* — Chacun de ces deux points est ce que l'on appelle un *point double* (*G. S.*, 151).

Pour les déterminer, remarquons que si deux points homologues coïncident, on a $x = y$; et par suite

$$x^2 + (\lambda + \mu)x + \nu = 0,$$

équation qui donne deux valeurs de x. Il y a donc deux points, et seulement deux, qui satisfont à la question.

Le milieu des deux points doubles est aussi le milieu

des deux points I *et* J′ *qui, dans les deux divisions, correspondent à l'infini* (*G. S.*, 152).

En effet, le milieu de la ligne qui joint les points doubles est déterminé par le chemin

$$x_1 = -\frac{\lambda + \mu}{2},$$

ou, en remplaçant les constantes par leurs valeurs,

$$x_1 = \frac{OJ' + OI}{2}.$$

Mais il faut remarquer que généralement la ligne qui joint les points doubles ne coïncide pas avec celle des points J′ et I. Pour connaître la situation relative de ces droites, imaginons qu'on ait placé l'origine commune des x et des y au point milieu de la ligne qui joint les points J′ et I. Il faut alors supposer dans les équations précédentes $\lambda = -\mu$, et par conséquent $OJ' = -OI$. D'ailleurs, les points A′ et B *relatifs à l'origine actuelle* sont aussi placés à égale distance de part et d'autre de cette origine, c'est-à-dire qu'on a maintenant $OA' = -OB$; et il vient, pour la détermination des points doubles D, indifféremment

$$OD = \pm\sqrt{OI . OB}, \quad \text{ou} \quad OD = \pm\sqrt{OJ' . OA'}.$$

Donc l'origine actuelle est à la fois le *point milieu* de trois droites, savoir :

de la ligne des points I et J′ ;
de la ligne des points B et A′ ;
de la ligne des points doubles.

De plus, cette dernière est bissectrice des deux autres. Cela résulte des valeurs de OD trouvées ci-dessus et interprétées d'après les principes du calcul directif.

Donc, si les deux premières lignes se confondent, ce qui arrive quand les coefficients λ, μ, ν, sont de forme dite *réelle* (positifs ou négatifs), la troisième se confond avec elles ou bien leur est perpendiculaire, selon que les points I et B (ou bien les points J′ et A) sont du même côté de O, ou de part et d'autre de ce point ; car dans le premier cas l'angle IOB est nul ; et dans le second il est égal à deux droits.

Pour exprimer *le cas où l'un des points doubles est à l'infini*, il faut, dans notre équation (1) du (§ 2), attribuer au premier terme un coefficient qui, pour le cas en question, s'évanouit. Alors cette équation (1) s'abaissant au premier degré exprimera, comme nous l'avons expliqué précédemment, une *transformation par similitude*. (*G. S.*, 157.)

Et pour *le cas où les deux points doubles sont à l'infini*, notre même équation (1) devrait avoir la forme

$$x - y + \nu_1 = 0,$$

et alors deux chemins homologues des deux plans seraient toujours égaux (*G. S.*, 169).

(§ 5). L'équation de l'homographie, quand l'origine commune des chemins homologues est, comme nous le supposons, au milieu des points I et J′, peut s'écrire comme il suit :

$$xy + \text{OI}(x - y) - \overline{\text{OD}}^2 = 0,$$

et alors il est bien aisé d'étendre à l'homographie du plan ce théorème de l'homographie de la droite :

Le rapport des distances d'un point de la première division aux deux points doubles est au rapport des distances du point correspondant de la seconde division aux deux mêmes points, dans une raison constante (*G. S.*, 153).

Cela résulte en effet du calcul suivant :

$$\frac{x-\mathrm{OD}}{x+\mathrm{OD}}:\frac{y-\mathrm{OD}}{y+\mathrm{OD}}=\frac{xy+\mathrm{OD}(x-y)-\overline{\mathrm{OD}}^2}{xy-\mathrm{OD}(x-y)-\overline{\mathrm{OD}}^2}=\frac{\mathrm{OI}-\mathrm{OD}}{\mathrm{OI}+\mathrm{OD}}.$$

Supposons le cas où les coefficients λ, μ, ν sont des nombres positifs ou négatifs; alors le nombre $\frac{\mathrm{OI}-\mathrm{OD}}{\mathrm{OI}+\mathrm{OD}}$ est lui-même positif ou négatif, et le lecteur reconnaîtra aisément que, dans ce cas, le quadrilatère formé par les deux points doubles et par deux points homologues quelconques X et Y est toujours inscriptible.

(§ 6). Conservant toujours la même origine, j'écris l'équation de l'homographie sous les formes suivantes :

$$(x-\mathrm{OI})(y-\mathrm{OJ}')=\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OI}}^2=(\mathrm{OD}-\mathrm{OI})(\mathrm{OD}-\mathrm{OJ}');$$
$$\mathrm{IX}.\mathrm{J}'\mathrm{Y}=\mathrm{ID}.\mathrm{J}'\mathrm{D},$$

et j'en déduis premièrement l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x-\mathrm{OI}}=-\frac{dy}{y-\mathrm{OJ}'},\quad \text{ou bien}\quad \frac{dx}{\mathrm{IX}}=-\frac{dy}{\mathrm{J}'\mathrm{Y}},$$

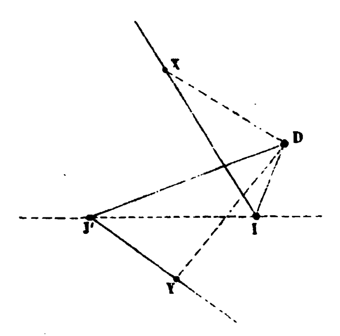
d'après laquelle on voit que, si l'extrémité du chemin x décrit une droite passant par le point I, l'extrémité du chemin correspondant y décrira une autre droite passant par le point J′.

Les directions relatives de deux telles droites sont déterminées par l'équation de l'homographie, et leur relation est simplement que l'une de leurs bissectrices est parallèle au chemin exprimé par le nombre directif $\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OI}}^2$. Ce sont donc des droites *conjuguées* par couples. Or voici une des plus belles propriétés des points doubles ; c'est que

De chaque point double on voit, sous des angles

égaux et formés dans le même sens de rotation, tous les segments qui joignent deux points homologues relatifs à un même couple de droites conjuguées.

En effet, soient X et Y deux points homologues sur les droites conjuguées IX et J'Y, et D l'un des points doubles.



De la seconde des deux équations ci-dessus, on tire

$$\frac{IX}{ID} = \frac{J'D}{J'Y},$$

d'où résulte la similitude des deux triangles IDX, J'YD; car Mourey, qui a poussé beaucoup plus loin qu'Argand et Français l'étude du nouveau calcul, a très-bien fait voir que l'égalité des rapports directifs entre deux côtés homologues de deux triangles suffit pour exprimer leur similitude, parce que cette condition implique à la fois la proportionnalité des côtés et l'égalité des deux angles compris.

On a donc aussi l'égalité $\frac{DX}{DI} = \frac{YD}{YJ'}$, qu'on peut écrire sous cette autre forme

$$\frac{DX}{DY} = \frac{DI}{J'Y};$$

or l'angle directeur du second membre de cette équation est constant, puisque le point Y est censé décrire la droite J′Y; donc, etc.

(§ 7). Application des résultats précédents aux *divisions homographiques formées sur une même droite.*

D'après ce qui précède, la théorie des divisions homographiques formées sur une même droite peut être envisagée sous un point de vue qui justifie nos précédentes assertions; car nous savons maintenant que, si l'équation à coefficients de la forme dite *réelle*

$$xy + \lambda x + \mu y + \nu = 0$$

exprime deux divisions homographiques d'une même droite lorsqu'on donne à l'une des variables une valeur arbitraire de cette même forme, c'est parce qu'elle possède la même signification à l'égard de la totalité du plan lorsqu'on attribue à l'une des variables une valeur directive quelconque;

De sorte que des points homologues de cette droite ne peuvent avoir aucune propriété corrélative qui n'existe également entre des points homologues du plan;

Et que, comme il existe dans les deux divisions correspondantes du plan deux points doubles qui régissent en un certain sens la corrélation de deux points homologues quelconques de ce plan, ces mêmes points doubles ne peuvent jamais manquer de régir la corrélation entre deux points homologues de la droite, qu'ils soient d'ailleurs placés sur la droite elle-même ou bien hors de cette droite;

Enfin la forme dite *réelle* qu'affectent les coefficients de l'équation ci-dessus entraîne, pour les deux divisions du plan, des conséquences dont quelques-unes ont été déjà signalées ci-dessus et qui expliquent les propriétés des deux divisions de la droite.

Par exemple, nous savons que, dans les conditions actuelles, la ligne des deux points I et J′ coïncide avec celle des deux points qui sont, dans le système des x et dans celui des y respectivement, les deux transformants du point milieu du segment IJ′. Or nous avons remarqué que, dans une telle circonstance, les points doubles sont, ou bien sur cette droite, ou bien sur une perpendiculaire à cette droite, et, dans l'un comme dans l'autre cas, à égale distance de part et d'autre du point O. Aussi lorsque ces points, conformément aux idées reçues, sont réputés ne pas exister parce que l'équation qui les donne a ses racines imaginaires, le calcul directif nous les fait trouver précisément sur cette perpendiculaire.

De plus, le lecteur rattachera aisément à la propriété des points doubles du plan, signalée dans le précédent paragraphe, le beau théorème formulé comme il suit :

Quand deux divisions homographiques formées sur une même droite n'ont pas de points doubles, il existe, de part et d'autre de cette droite, un point d'où l'on voit sous des angles égaux et formés dans le même sens de rotation tous les segments compris entre les points de la première division et leurs homologues respectifs. (*G. S.*, 171.)

C'est que, dans la circonstance actuelle (définie par la nature des coefficients λ, μ, ν), la ligne des deux points J′ et I représente en direction l'une des bissectrices de chacun des couples de droites que nous avons appelées *droites conjuguées*; droites dont l'une, comme nous l'avons vu, passe toujours par le point J′ et l'autre par le point I. Il y a donc un de ces couples dont les deux droites tombent ensemble sur la ligne J′I. Ce sont ces deux droites superposées dont l'équation générale, ci-dessus reproduite, représente l'homographie, et par conséquent les

segments entre leurs points homologues doivent être vus des points doubles du plan sous des angles égaux. Or les deux points signalés de part et d'autre de la droite doublement divisée sont précisément *les deux points doubles de la division du plan*. N'hésitons donc pas à y reconnaître les points doubles de la droite elle-même.

(§ 8). *Autres applications.* — Je pourrais encore appliquer ce qui précède à faire voir que, *si l'on donne sur un plan deux droites; sur la première droite trois points* a, b, c, *et sur la seconde droite trois autres points* a', b', c', *il existe sur ce plan deux points d'où l'on aperçoit sous des angles égaux les trois segments* aa', bb', cc', ce qui est la généralisation du beau théorème de la *G. S.*, 173.

Je pourrais donner une solution géométrique du célèbre problème de la SECTION DÉTERMINÉE (*G. S.*, 281) étendu au plan, et, par conséquent, énoncé comme il suit : *Étant donnés quatre points sur un plan, déterminer sur ce plan un cinquième point tel, que le produit de ses distances à deux des quatre points donnés soit au produit de ses distances aux deux autres dans une raison donnée.*

Je pourrais étendre la belle démonstration géométrique du principe d'algèbre relatif à la *décomposition des fractions rationnelles en fractions simples* (*G. S.*, 317 et suiv.) au cas où les deux polynômes (numérateur et dénominateur) ne sont pas décomposables en facteurs réels du premier degré; au cas même où leurs coefficients sont quelconques, c'est-à-dire de forme imaginaire; et alors on verrait bien que cette ingénieuse démonstration géométrique, pour atteindre à la généralité que comporte le théorème d'algèbre, doit supposer la représentation des imaginaires algébriques par les chemins inclinés de la géométrie.

Je pourrais aussi, à l'aide du calcul directif, étudier les relations qui existent entre quatre points situés sur un plan lorsque leur rapport anharmonique est égal à -1. Et alors on verrait toutes les relations qui ont lieu entre quatre points formant sur une droite une *proportion harmonique* se transfigurer en autant de propriétés d'un quadrilatère qu'on pourrait appeler *quadrilatère harmonique*.

Avec cette notion du quadrilatère harmonique, je pourrais montrer que, si l'on a deux divisions homographiques sur un plan, on peut, comme pour le cas d'une droite, *construire le conjugué harmonique d'un point par rapport aux deux points doubles, sans connaître ces points doubles*.

Je pourrais étendre au plan la *Théorie de l'Involution*, étude très-intéressante, parce qu'ici, à l'aide du calcul directif, je retrouverais les propriétés de la *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

Je pourrais aussi trouver matière à d'autres applications très-nombreuses du calcul directif dans un important Mémoire publié autrefois sur ce sujet par M. Siebeck, et signalé récemment par M. Hoüel à l'attention des géomètres (*).

Et si quelqu'un pensait que tant de théorèmes déjà démontrés à l'aide du calcul directif ne sont pas en assez grand nombre pour qu'on puisse oser se permettre de prendre parti en faveur de ce calcul, aussi longtemps que quelque sommité scientifique n'aura pas donné l'exemple de l'introduire dans toutes les parties de l'Algèbre, comme déjà Cauchy l'avait introduit dans la théorie des fonctions (*voir* l'article *Séparation des racines, Nouvelles Annales*, janvier 1868), je pourrais dire à cet esprit circonspect

(*) Geometrische Bedeutung imaginärer Zahlen (*Journal de Crelle*, 1858).

que peut-être il n'en est pas des Mathématiques comme des Sciences Empiriques, où en effet la vérité plus ou moins probable d'un principe dépend du nombre de ses applications; mais enfin je demanderais qu'on fixât le nombre d'applications qui est nécessaire en sciences rationnelles pour établir la validité d'un principe, car la théorie directive serait certainement en mesure de fournir le nombre voulu.

X.

Je place ici, à la fin de cette exposition, et pour lui servir de résumé, un sommaire où les résultats se suivent dans leur ordre logique.

SOMMAIRE. — Idée du nombre directif; c'est le nombre abstrait, impliquant à la fois longueur et direction, et, par là, devenu apte à mesurer tout segment de droite tracé sur un plan dans une direction déterminée. — Opérations élémentaires du calcul appliquées aux nombres directifs. — Sommes et produits. — La multiplication fait tourner. — L'angle directeur d'un produit est égal à la somme des angles de ses facteurs. — Règle des signes des produits quand les facteurs n'ont pas d'autres inclinaisons que 0° ou 180°, ou autrement lorsqu'ils sont positifs ou négatifs.

Équations algébriques à une seule inconnue. — L'équation du premier degré dont les coefficients sont positifs ou négatifs est résolue par un nombre dont l'angle directif ne peut être que 0° ou 180°; — l'équation du second degré à coefficients quelconques a pour racines deux nombres directifs. — Les racines de l'équation binôme de degré m sont toutes d'égale longueur; si on les place à partir d'un centre commun selon leurs directions propres, elles partagent l'aire du cercle en m parties égales, figurant ainsi la roue d'un char. — Démonstrations intuitives : 1° du principe que toute équation a une racine; 2° du principe des substitutions et du principe de Rolle; ces deux principes étant d'ailleurs appliqués à des équations dont les

coefficients sont quelconques (directifs); 3° du théorème de Cauchy sur le nombre des points-racines contenus dans un contour donné; 4° d'un théorème analogue sur le nombre des points-racines contenus sur certains arcs de courbes; 5° de ce que tout polynôme algébrique entier de degré m en x, x étant la distance entre un point variable du plan et l'origine, représente le produit des distances de ce point variable à m points fixes.

Application de l'algèbre directive à la géométrie; — et d'abord à des problèmes déterminés. — Les problèmes les plus élémentaires et les plus anciennement résolus n'ont jamais été discutés complétement et ne pouvaient pas l'être avant l'invention du calcul directif, puisque la forme imaginaire était présumée ne pouvoir répondre à aucune grandeur. — On discute un problème qui donne lieu à l'équation générale du second degré, et l'on fait voir qu'une telle équation a toujours deux racines réelles.

L'équation entre deux variables directives ne correspond pas à un lieu déterminé; — c'est le symbole d'une transformation de figures parce que, chacune des variables représentant un chemin tracé à partir d'une origine fixe, si l'on fait parcourir une figure déterminée à l'extrémité de l'une d'elles, l'extrémité de l'autre tracera une figure correspondante, ou plusieurs, selon le degré de l'équation. — L'équation du premier degré entre deux variables représente une transformation par similitude. — Démonstration d'un théorème relatif aux centres de similitude. — Quel que soit le degré d'une transformation algébrique, la région infiniment petite autour d'un point transformant est semblable à la région infiniment petite autour du point transformé. — Donc les angles de la figure transformée se conservent dans la figure transformante, et cela particularise ces sortes de transformations. — Propriétés nouvelles des trajectoires d'un système de coniques confocales obtenues par le moyen du calcul directif. — Le calcul directif résout par de simples éliminations certaines questions qui paraissaient ressortir directement au calcul intégral. — Ainsi, non-seulement le

calcul directif établit l'unité de la science en comblant cette sorte d'abîme qu'on supposait exister entre les racines dites *réelles* et les racines dites *imaginaires*, mais, de plus, il offre à la science des ressources nouvelles.

La substitution des nombres directifs aux nombres imaginaires fait disparaître de l'enseignement des mathématiques ce que Gergonne appelle des *non-sens*, ce que M. Hoüel appelle des *compensations d'absurdités*, ce que M. Duhamel déclare être des *symboles dénués de toute signification* et qu'on ne peut soumettre aux opérations du calcul qu'*en se gardant bien d'attacher à ces opérations aucun sens.*

A la vérité, deux illustres géomètres ont déjà fait en géométrie un usage étendu des imaginaires, sans avoir recours au principe du nombre directif; et alors y a-t-il vraiment nécessité de prendre parti en faveur de ce principe? — Les théories de M. Poncelet, notamment les *Sécantes idéales*, les *Coniques supplémentaires* et le *Principe de continuité* n'ont aucun rapport avec l'algèbre directive; l'illustre auteur du *Traité des propriétés projectives des figures* ne s'est jamais proposé de trouver une grandeur géométrique dont toutes les propriétés correspondraient à celles du symbole des imaginaires et qui, en conséquence, serait apte à réaliser ce symbole. — M. Chasles a véritablement fait en géométrie un usage étendu des imaginaires, puisqu'il fait intervenir dans ses démonstrations ce qu'il appelle les *éléments* des racines imaginaires, c'est-à-dire leurs fonctions symétriques; mais ses résultats peuvent être invoqués en faveur de la représentation des racines par des nombres inclinés. — En effet, à l'aide du calcul directif, on étend à des points situés sur un plan la théorie des divisions homographiques, et alors on est conduit à reconnaître que *les points doubles* de deux divisions homographiques d'une droite existent dans tous les cas, c'est-à-dire lors même que les racines de l'équation qui les détermine ont la forme des quantités dites *imaginaires.*

Post-scriptum. — Au moment où je corrige les épreuves de ce dernier article, on signale à mon attention deux Mémoires de M. Möbius insérés au *Journal de Crelle*, en 1856, dans lesquels l'illustre auteur du *Calcul barycentrique* étudie les propriétés du double rapport formé avec quatre segments pris parmi ceux qui unissent deux à deux quatre points situés d'une manière quelconque sur un plan. Et comme il fait correspondre ces segments aux formes imaginaires de l'algèbre, il trouve que leurs relations ont les mêmes expressions algorithmiques que celles des segments en ligne droite. Cela le conduit à étudier la figure que, dans les indications succinctes données ci-dessus, j'ai appelée le *quadrilatère harmonique* et à donner quelques-unes des propriétés de ce que j'ai appelé *la double division homographique du plan.*

A ces résultats de M. Möbius, ajoutez la publication de Scheffler (der situation-kalkul, *Brunswick*, 1851); le très-beau Mémoire de Siebeck (*Journal de Crelle*, 1858); d'autres indications encore données dans l'ouvrage récent de M. Hoüel; et d'après cela reconnaissez que si, à la vérité, la théorie du calcul directif a été proposée en France depuis bien longtemps (1813, 1828), et proposée par des géomètres très-peu illustres, Français, Argand, Mourey, d'autre part elle a été depuis lors retrouvée par des géomètres étrangers dont quelques-uns jouissent d'un grand renom; que par eux elle n'a pas été *dédaignée* (se rappeler la recommandation de Gergonne); que par leurs travaux elle a reçu de grands développements et des applications utiles... et qu'ainsi elle réunit maintenant les conditions que doit offrir toute idée nouvelle pour être accueillie sans difficulté parmi nous.

FIN.

SUR LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE DE LOBATCHEFFSKY

(voir p. 200);

PAR M. G. BATTAGLINI.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, juin 1867.

Giornale di Matematiche, t. V, p. 217.

III.

Cherchons maintenant les relations entre les parties d'un triangle, et supposons en premier lieu que le triangle ait un angle droit C. Soient A, B les deux angles obliques, opposés respectivement aux côtés a, b, et soit c l'hypoténuse. D'après ce que nous avons dit, on aura évidemment les relations

$$(11)\qquad \mathrm{Th}\,a = \Phi(b)\,\mathrm{tang}\,A,\quad \mathrm{Th}\,b = \Phi(a)\,\mathrm{tang}\,B,$$

d'où l'on tire

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin A &= \frac{\mathrm{Th}\,a}{\sqrt{\mathrm{Th}^2 a + \Phi^2(b)}} \\ &= \frac{\mathrm{Sh}\,a}{\sqrt{\mathrm{Sh}^2 a + \Phi^2(b) + \mathrm{Sh}^2 a.\Phi^2(b)}}, \\ \sin B &= \frac{\mathrm{Th}\,b}{\sqrt{\mathrm{Th}^2 b + \Phi^2(a)}} \\ &= \frac{\mathrm{Sh}\,b}{\sqrt{\mathrm{Sh}^2 b + \Phi^2(a) + \mathrm{Sh}^2 b.\Phi^2(a)}}. \end{aligned}\right.$$

En remarquant que, *quel que soit c,* pour $\sin A = 0$ ou $\sin B = 0$, on doit avoir $a = 0$ ou $b = 0$, et pour $\sin A = 1$ ou $\sin B = 1$, on doit avoir $a = c$ ou $b = c$, il

est facile de voir que sin A et sin B ont nécessairement des expressions de la forme

$$\sin A = \frac{f(a)}{f(c)}, \quad \sin B = \frac{f(b)}{f(c)}.$$

De plus, c devant être évidemment une fonction symétrique de a et de b, il en sera de même aussi pour $f(c)$. On aura donc, pour satisfaire à de telles conditions,

$$(13) \quad \Phi(a) = \mathrm{Th}\, a = f(a), \quad \Phi(b) = \mathrm{Th}\, b = f(b),$$

ou bien

$$(14) \quad \Phi(a) = \mathrm{Sh}\, a = f(a), \quad \Phi(b) = \mathrm{Sh}\, b = f(b).$$

Les équations (13) correspondent au système de la *Géométrie euclidienne*. On tire, en effet, des équations (11), (12), (13),

$$(15) \begin{cases} \sin A = \cos B = \dfrac{\mathrm{Th}\, a}{\mathrm{Th} c}, \quad \sin B = \cos A = \dfrac{\mathrm{Th}\, b}{\mathrm{Th} c}, \\ \mathrm{Th}^2 c = \mathrm{Th}^2 a + \mathrm{Th}^2 b. \end{cases}$$

Si l'on abaisse maintenant de C une perpendiculaire sur l'hypoténuse c, et qu'on appelle α, β les segments de c adjacents à A, B, on aura, par les relations (15),

$$\mathrm{Th}\, \alpha = \mathrm{Th}\, b \cos A = \frac{\mathrm{Th}^2 b}{\mathrm{Th} c}, \quad \mathrm{Th}\, \beta = \mathrm{Th}\, a \cos B = \frac{\mathrm{Th}^2 a}{\mathrm{Th} c},$$

$$\mathrm{Th}\, c = \mathrm{Th}(\alpha + \beta) = \mathrm{Th}\, \alpha + \mathrm{Th}\, \beta.$$

Cette dernière équation conduit à la condition

$$\mathrm{Sh}\, \alpha\, \mathrm{Sh}\, \beta = 0;$$

et, comme on a

$$\mathrm{Sh}\, \alpha = k\alpha + \frac{k^3 \alpha^3}{2.3} + \ldots, \quad \mathrm{Sh}\, \beta = k\beta + \frac{k^3 \beta^3}{2.3} + \ldots,$$

on en conclura $k = 0$, et les équations (15) se réduiront

aux formules connues de la Trigonométrie plane ordinaire

$$(16)\quad \begin{cases} \sin A = \cos B = \dfrac{a}{c}, \quad \sin B = \cos A = \dfrac{b}{c}, \\ c^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Les équations (14) correspondent, au contraire, au système de la *Géométrie non euclidienne*. En effet, des équations (11), (12), (14), on tire

$$(17)\quad \begin{cases} \mathrm{Sh}\,a = \mathrm{Sh}\,c \sin A, \quad \mathrm{Sh}\,b = \mathrm{Sh}\,c \sin B, \\ \mathrm{Th}\,a = \mathrm{Th}\,c \cos B, \quad \mathrm{Th}\,b = \mathrm{Th}\,c \cos A, \\ \mathrm{Ch}\,c = \mathrm{Ch}\,a\,\mathrm{Ch}\,b = \cot A \cot B, \\ \cos A = \mathrm{Ch}\,a \sin B, \quad \cos B = \mathrm{Ch}\,b \sin A, \\ \mathrm{Th}\,a = \mathrm{Sh}\,b \,\mathrm{tang}\, A, \quad \mathrm{Th}\,b = \mathrm{Sh}\,a \,\mathrm{tang}\, B, \end{cases}$$

et ce sont là (sous une forme un peu différente) les relations données par Lobatcheffsky (*).

Les formules (17) se réduisent aux formules (16) lorsque les côtés du triangle proposé sont infiniment petits.

Il suit de ce que nous avons dit qu'entre l'angle de parallélisme Δ et la distance δ du point p à la droite L, on a la relation

$$\mathrm{Sh}\,\delta \,\mathrm{tang}\,\Delta = 1,$$

d'où

$$(18)\quad \mathrm{tang}\,\Delta = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,\delta}, \quad \sin\Delta = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,\delta}, \quad \cos\Delta = \mathrm{Th}\,\delta.$$

Les formules (17) font voir que l'angle aigu compris entre deux droites qui se rencontrent en un point à l'infini est égal à zéro; et que l'angle compris entre deux droites qui se rencontrent en un point idéal est exprimé par $ik\delta$, δ étant la longueur de leur perpendiculaire commune.

(*) *Études géométriques, etc.*, p. 27.

En procédant d'une manière analogue, on obtiendra les relations entre les parties d'un angle trièdre qui a un angle dièdre droit. Ces relations peuvent se déduire des formules (17), en y substituant $i\frac{a}{k}$, $i\frac{b}{k}$, $i\frac{c}{k}$ au lieu de a, b, c.

Considérons maintenant un triangle quelconque. Soient a, b, c ses côtés, évalués en parcourant le périmètre du triangle dans un sens constant; et soient A, B, C les angles *extérieurs* du triangle, compris entre $(b, c), (c, a), (a, b)$. Soient γ la perpendiculaire abaissée du sommet C sur le côté c, et (C_α, C_β), (c_α, c_β) les parties dans lesquelles cette perpendiculaire divise l'angle C et le côté c. On aura évidemment les relations

$$\sin A \,\mathrm{Sh}\, b = \sin B \,\mathrm{Sh}\, a = \mathrm{Sh}\,\gamma,$$

$$\operatorname{tang} C_\alpha = -\frac{\cot A}{\mathrm{Ch}\, b}, \qquad \operatorname{tang} C_\beta = -\frac{\cot B}{\mathrm{Ch}\, a},$$

$$\mathrm{Th}\, c_\alpha = -\mathrm{Th}\, b \cos A, \qquad \mathrm{Th}\, c_\beta = -\mathrm{Th}\, a \cos B,$$

$$\operatorname{tang}(C_\alpha + C_\beta) = -\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} A \,\mathrm{Ch}\, b + \operatorname{tang} B \,\mathrm{Ch}\, a}{1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \,\mathrm{Ch}\, a \,\mathrm{Ch}\, b},$$

$$\mathrm{Th}(c_\alpha + c_\beta) = -\mathrm{Th}\, c = \frac{-\mathrm{Th}\, a \cos B - \mathrm{Th}\, b \cos A}{1 + \mathrm{Th}\, a \,\mathrm{Th}\, b \cos A \cos B},$$

d'où l'on tire

$$(19)\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{Sh}\, a}{\sin A} = \frac{\mathrm{Sh}\, b}{\sin B}, \\ &\frac{\operatorname{tang} A}{\mathrm{Ch}\, a} + \frac{\operatorname{tang} B}{\mathrm{Ch}\, b} + \frac{\operatorname{tang} C}{\mathrm{Ch}\, a \,\mathrm{Ch}\, b} - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = 0, \\ &\frac{\mathrm{Th}\, a}{\cos A} + \frac{\mathrm{Th}\, b}{\cos B} + \frac{\mathrm{Th}\, c}{\cos A \cos B} + \mathrm{Th}\, a \,\mathrm{Th}\, b \,\mathrm{Th}\, c = 0. \end{aligned}\right.$$

En posant

$$\Sigma^2 = 1 - \mathrm{Ch}^2 a - \mathrm{Ch}^2 b - \mathrm{Ch}^2 c + 2\,\mathrm{Ch}\,a\ \mathrm{Ch}\,b\ \mathrm{Ch}\,c,$$
$$\sigma^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C,$$

les formules (19) et leurs analogues donneront

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{Sh}^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\mathrm{Sh}^2 b}{\sin^2 B} = \frac{\mathrm{Sh}^2 c}{\sin^2 C} = \frac{-\sigma^2}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C},\\
&\frac{\sin^2 A}{\mathrm{Sh}^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\mathrm{Sh}^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\mathrm{Sh}^2 c} = \frac{\Sigma^2}{\mathrm{Sh}^2 a\, \mathrm{Sh}^2 b\, \mathrm{Sh}^2 c},\\
&\mathrm{Ch}\,a = \mathrm{Ch}\,b\ \ \mathrm{Ch}\,c + \mathrm{Sh}\,b\ \mathrm{Sh}\,c \cos A,\\
&\mathrm{Ch}\,b = \mathrm{Ch}\,c\ \ \mathrm{Ch}\,a + \mathrm{Sh}\,c\ \mathrm{Sh}\,a \cos B,\\
&\mathrm{Ch}\,c = \mathrm{Ch}\,a\ \ \mathrm{Ch}\,b + \mathrm{Sh}\,a\ \mathrm{Sh}\,b \cos C,\\
&\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C\, \mathrm{Ch}\,a,\\
&\cos B = \cos C \cos A - \sin C \sin A\, \mathrm{Ch}\,b,\\
&\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B\, \mathrm{Ch}\,c,
\end{aligned}\right.$$

et trois quelconques de ces équations serviront pour exprimer les relations entre les côtés et les angles d'un triangle.

Les équations (20) n'éprouvent aucune altération, lorsqu'on y remplace a, b, c, A, B, C par $i\frac{A}{k}$, $i\frac{B}{k}$, $i\frac{C}{k}$, ika, ikb, ikc. Il suit de là qu'à tout triangle correspond un triangle idéal tel, que les sommets de chacun de ces deux triangles sont respectivement les *pôles* des côtés correspondants de l'autre.

Les formules (20) se réduisent aux formules connues de la Trigonométrie plane ordinaire, lorsque les côtés du triangle proposés sont infiniment petits.

En procédant d'une manière analogue, nous obtiendrons les relations entre les parties d'un angle trièdre, relations qui peuvent se déduire des équations (20), en remplaçant a, b, c par $i\frac{a}{k}$, $i\frac{b}{k}$, $i\frac{c}{k}$.

De ce qui précède il résulte évidemment que, dans la Géométrie plane, les relations métriques des figures dépendent de la constante k. Cette constante ne pouvant être déterminée *à priori* (à moins qu'entre les deux conceptions de la ligne droite indiquées précédemment, on ne veuille se décider pour celle d'Euclide), on devra, *dans la science pure*, la conserver comme absolument *indéterminée*. Si, pour l'homogénéité des formules, on pose $kl = 1$, l sera la longueur d'une certaine droite, que l'on doit chercher à déterminer, lorsqu'on veut procéder aux applications *pratiques* de la Géométrie. Pour y parvenir, il suffit d'exécuter *une seule expérience*, savoir, de mesurer les parties d'un triangle (l'unité angulaire étant l'angle droit divisé par le nombre $\frac{\pi}{2}$, et l'unité de longueur étant une droite arbitraire), et, en substituant les nombres qui les représentent dans une des équations (20) (ou dans toute autre équation qui s'en déduise), de tirer de cette équation le nombre k. Alors on aura l égale à la droite prise pour unité, divisée par k. Par exemple, si a et A sont le côté et l'angle d'un triangle équilatéral et par suite équiangle, on aura, pour déterminer k, l'équation

$$ka = \log \frac{1 + \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2} A - 1}}{1 - \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2} A - 1}}.$$

On trouve ainsi (eu égard à nos moyens d'observation et à notre organisation même) pour k une valeur tellement petite, que l dépasse tout ce que nous pouvons mesurer. Nous sommes donc ramenés dans la pratique à la Géométrie euclidienne.

Si l'on prend la droite l pour unité de longueur, les

formules (20) se simplifieront, puisqu'on aura alors $k=1$.

IV.

Si aux milieux des côtés a, b, c d'un triangle on élève des perpendiculaires, celles-ci se rencontreront en un même point (à une distance finie, infinie ou idéale), lequel sera à égale distance des sommets A, B, C du triangle. En appelant r le rayon du cercle circonscrit au triangle, et α, β, γ les angles au centre, opposés à ses côtés, on aura les relations

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\beta}=\frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\operatorname{Sh}r,\\ &\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\pi. \end{aligned}\right.$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}\Pi^2=&\left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a+\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b+\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c\right)\left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b+\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c-\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a\right)\\ &\times\left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c+\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a-\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b\right)\left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a+\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b-\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c\right),\end{aligned}$$

on tire

$$(22)\qquad \operatorname{Sh}r=\frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c}{\Pi}.$$

Soit $a<b<c$; le centre du cercle sera à une distance finie, infinie ou idéale, suivant que l'on aura

$$\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a+\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b \gtreqless \operatorname{Sh}\frac{1}{2}c.$$

Tous les points du cercle sont équidistants non-seulement du centre, mais encore de la droite dont ce centre est le pôle. Cette droite se trouve à une distance idéale, infinie ou finie, suivant que le centre se trouve à une distance finie, infinie ou idéale. La distance δ des points du cercle à la droite qui a son centre pour pôle est donnée par la formule

$$(23)\qquad \operatorname{Ch}\delta = \frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a\,\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b\,\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c.}{i\Pi}.$$

Tous les cercles qui ont le même centre (à une distance finie, infinie ou idéale) coupent orthogonalement toutes les droites menées par ce centre. Soient s, s' et S, S' deux arcs et deux secteurs correspondants à un même angle Δ au centre commun des cercles de rayons ρ, ρ' ; on aura

$$(24)\qquad \frac{s}{s'} = \frac{\text{circ.}\,\rho}{\text{circ.}\,\rho'} = \frac{\operatorname{Sh}\rho}{\operatorname{Sh}\rho'},\quad \frac{S}{S'} = \frac{\text{surf.}\,\rho}{\text{surf.}\,\rho'} = \frac{\operatorname{Sh}^2\frac{1}{2}\rho}{\operatorname{Sh}^2\frac{1}{2}\rho'}.$$

Si ρ' est infiniment petit, il viendra

$$\frac{s}{\Delta} = \frac{\text{circ.}\,\rho}{2\pi} = \frac{\operatorname{Sh}\rho}{k},\quad \frac{S}{\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\text{surf.}\,\rho}{\pi} = \frac{\operatorname{Sh}^2\frac{1}{2}\rho}{\frac{1}{4}k^2},$$

d'où

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= \frac{\Delta}{k}\operatorname{Sh}\rho, & \text{circ.}\,\rho &= \frac{2\pi}{k}\operatorname{Sh}\rho,\\ S &= \frac{2\Delta}{k^2}\operatorname{Sh}^2\frac{1}{2}\rho & \text{surf.}\,\rho &= \frac{4\pi}{k^2}\operatorname{Sh}^2\frac{1}{2}\rho\\ &= \frac{s}{k}\operatorname{Th}\frac{1}{2}\rho, & &= \frac{\text{circ.}\,\rho}{k^2}\operatorname{Th}\frac{1}{2}\rho. \end{aligned}\right.$$

Si le centre commun des deux cercles est à l'infini, en

posant $\rho - \rho' = \delta$, et appelant t la corde de l'arc s, on aura

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{ll} s' = se^{-\frac{\delta}{k}}, & S' = Se^{-\frac{2\delta}{k}}, \\ s = \dfrac{2\,\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}t}{k}, & S = \dfrac{2\,\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}t}{k^2}. \end{array} \right.$$

Enfin, si le centre commun des deux cercles est idéal, en désignant par δ, δ' les distances constantes de leurs points à la droite qui a leur centre pour pôle, et par τ la projection de l'arc s sur cette droite, on aura

$$(27)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{s}{s'} = \dfrac{\mathrm{Ch}\,\delta}{\mathrm{Ch}\,\delta'}, & \dfrac{S}{S'} = \dfrac{\mathrm{Ch}^2\,\frac{1}{2}\delta}{\mathrm{Ch}^2\,\frac{1}{2}\delta'} \\ s = \tau\,\mathrm{Ch}\,\delta, & S = \dfrac{\tau}{k}(\mathrm{Sh}\,\delta + i). \end{array} \right.$$

V.

Si le système des droites menées par un point p aux divers points d'une droite L, tourne avec L autour de la perpendiculaire O abaissée de p sur L, la droite L, par sa rotation autour du pied o de la perpendiculaire, décrira un plan P perpendiculaire à O, et l'on verra immédiatement, d'après ce que nous avons dit, quelles sont les droites menées par p qui rencontreront le plan P à une distance finie, infinie ou idéale. Toutes les droites qui rencontrent P en un point idéal sont perpendiculaires à un même plan, dont ce point est le *pôle*.

Dans le système de la Géométrie *non euclidienne*, le plan est une surface indéfinie, ses points à l'infini étant

tous *distincts* entre eux, et appartenant à *une circonférence de cercle,* qui a son centre en un point *quelconque* du plan et son rayon infini. De même pour l'espace, les points à l'infini sont tous *distincts* entre eux, et appartiennent à une *surface sphérique,* qui a son centre en un point *quelconque* et son rayon infini. Au contraire, dans le système de la Géométrie *euclidienne,* le plan est une surface indéfinie et *rentrante sur elle-même,* dont les points à l'infini coïncident deux à deux avec les points d'une *ligne droite*. De même, l'espace est un lieu continu, indéfini et *rentrant sur lui-même,* dont les points à l'infini coïncident deux à deux avec les points d'un plan.

Sans entrer pour le moment dans d'autres développements sur cet objet, examinons seulement le triangle sphérique déterminé par l'intersection des trois faces d'un angle solide, de sommet p, avec la surface sphérique décrite en faisant tourner autour de O le cercle de centre p et de rayon ρ. En désignant par A, B, C les inclinaisons des faces, et par a, b, c les angles plans de l'angle solide (évalués comme il a été dit au n° 3), A, B, C seront les angles *extérieurs* du triangle sphérique, et les longueurs α, β, γ de ses côtés seront données par les formules

(28) $$\frac{\alpha k}{a} = \frac{\beta k}{b} = \frac{\gamma k}{c} = \mathrm{Sh}\,\rho.$$

En posant

(29) $$2\pi - (A + B + C) = \varepsilon,$$

on sait que ε est la mesure de la surface S du triangle sphérique $\left(\text{c'est-à-dire que, pour deux triangles appartenant à une même surface sphérique, on a } \frac{S}{S'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$, et que la

valeur de ε est donnée par la formule

$$(30)\quad \begin{cases} \tang^2 \frac{1}{4}\varepsilon = \tang \frac{1}{4}(a+b+c) \tang \frac{1}{4}(b+c-a) \\ \qquad \times \tang \frac{1}{4}(c+a-b) \tang \frac{1}{4}(a+b-c) \\ \text{ou} \\ \tang^2 \frac{1}{4}\varepsilon = \tang \frac{1}{4} k \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\mathrm{Sh}\rho} \tang \frac{1}{4} k \frac{\beta+\gamma-\alpha}{\mathrm{Sh}\rho} \\ \qquad \times \tang \frac{1}{4} k \frac{\gamma+\alpha-\beta}{\mathrm{Sh}\rho} \tang \frac{1}{4} k \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\mathrm{Sh}\rho}. \end{cases}$$

Le second membre de l'équation (30) pouvant varier de zéro à l'infini, ε sera compris entre zéro et 2π, de sorte que les triangles appartenant à une surface sphérique qui a son centre à une distance finie, ont la somme de leurs angles extérieurs comprise entre zéro et quatre angles droits.

Si le centre de la sphère se trouve à une distance infinie, a, b, c étant des quantités infiniment petites, ε sera aussi infiniment petit; de sorte que les triangles appartenant à une surface sphérique dont le centre est à l'infini auront toujours la somme de leurs angles extérieurs égale à quatre angles droits. Par suite, comme on a, pour ces triangles

$$(31)\quad \begin{cases} \frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin C}, \\ A + B + C = 2\pi, \end{cases}$$

leurs côtés et leurs angles satisferont aux relations de la Trigonométrie plane ordinaire.

Dans le cas actuel, les angles pouvant être substitués dans l'équation (30) à la place de leurs tangentes, si l'on fait

$$(32)\quad E^2 = \frac{1}{16}(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma),$$

on aura, pour deux triangles de la surface sphérique de rayon infini,

$$\frac{S}{S'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{E}{E'}.$$

Si le centre de la sphère est à une distance idéale, en désignant par δ la distance commune des points de la surface sphérique au plan qui a le centre pour *pôle*, on aura

$$(33) \quad \begin{cases} \tan^2 \frac{1}{2}\varepsilon = \mathrm{Th}\,\frac{1}{4}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\mathrm{Ch}\,\delta}\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{4}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\mathrm{Ch}\,\delta} \\ \qquad \times\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{4}\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\mathrm{Ch}\,\delta}\,\mathrm{Th}\,\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\mathrm{Ch}\,\delta}, \end{cases}$$

et dans le cas particulier de $\delta = 0$, où la surface sphérique se réduit à un plan, il viendra

$$(34) \quad \begin{cases} \tan^2 \frac{1}{4}\varepsilon = \mathrm{Th}\,\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{4}(\beta+\gamma-\alpha) \\ \qquad \times\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{4}(\gamma+\alpha-\beta)\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma). \end{cases}$$

La quantité ε passant par zéro, lorsque le rayon varie, est maintenant devenue négative; de sorte que, le second membre de l'équation (33) ou (34) pouvant varier de zéro à l'unité, ε sera compris entre zéro et $-\pi$. Donc les triangles appartenant à une surface sphérique dont le centre est à une distance idéale (comme cela a lieu, en particulier, pour les triangles plans) ont la somme de leurs angles extérieurs comprise entre quatre droits et six droits.

Pour deux triangles appartenant à une surface sphérique de rayon idéal (et, en particulier, pour deux triangles plans), on a toujours la relation

$$\frac{S}{S'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

En supposant $\alpha < \beta < \gamma$, la valeur de E ou de ε, donnée par une des formules (32), (33), (34), est réelle, nulle ou imaginaire, suivant que l'on a $\alpha + \beta \gtreqless \gamma$. Il suit de là que, dans un triangle appartenant à une surface sphérique dont le centre est à une distance infinie ou idéale, le plus grand côté est toujours moindre que la somme des deux autres; et par suite, l'arc de cercle concentrique à la sphère (dans le cas particulier, la droite), qui passe par deux points de la surface sphérique de rayon infini ou idéal, représente sur cette surface (dans le cas particulier, sur le plan) la distance *minimum* de ces points.

Sur la surface sphérique de rayon fini, l'arc de cercle, concentrique à la sphère, mené par deux points, représente leur distance *minimum* ou *maximum*, suivant que cet arc est plus petit ou plus grand que la demi-circonférence.

INTERSECTION D'UNE SURFACE PAR UN PLAN;

PAR M. HOUSEL.

Un plan coupant une surface donnée, nous allons chercher l'équation de l'intersection, rapportée à des axes pris dans le plan même.

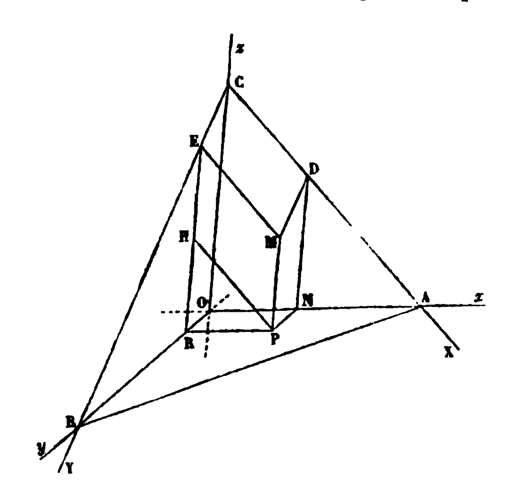
Le plan donné ABC a pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = q,$$

en représentant par q la distance de l'origine au plan et par α, β, γ les cosinus de cette distance avec les axes donnés. On sait que

$$\text{OC} = \frac{q}{\gamma}, \quad \text{OB} = \frac{q}{\beta}, \quad \text{OA} = \frac{q}{\alpha}.$$

Prenons pour axes des coordonnées, dans le plan, les droites CX, CY suivant lesquelles ce plan coupe les plans



des zx et des zy, et soit M un point du plan qui a pour coordonnées, d'un côté

$$MP = z, \quad PN = y, \quad ON = x,$$

et de l'autre

$$CD = X, \quad CE = Y.$$

On reconnaît facilement la relation

$$\frac{x}{X} = \frac{PR}{PH} = \frac{OA}{CA};$$

ce qui, à cause de

$$\overline{CA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2OA.OC\cos xz,$$

donne

$$\frac{x}{X} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos xz}},$$

ou bien

$$x = \rho X, \quad \text{en posant} \quad \rho = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos xz}};$$

de même

$$y = \rho' Y, \quad \text{en posant} \quad \rho' = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos yz}};$$

enfin

$$z = \frac{q - \alpha\rho X - \beta\rho' y}{\gamma}.$$

Substituant dans l'équation de la surface ces trois valeurs de x, de y et de z, on a l'équation en X et Y de la section cherchée.

Pour achever de déterminer le système des coordonnées X et Y, il faut calculer le cosinus de leur angle ACB.

Ici

$$\cos XY = \frac{\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AB}^2}{2 CA . CB};$$

d'après ce qui précède, on obtient

$$\cos XY = \frac{\rho\rho' [\alpha\beta + \gamma(\gamma \cos xy - \beta \cos xz - \alpha \cos yz)]}{\gamma^2}.$$

Coordonnées rectangulaires. — Dans ce cas, il reste

$$\rho = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad \rho' = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}},$$

$$\cos XY = \frac{\rho\rho' \alpha\beta}{\gamma^2} = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \gamma^2)}}.$$

De là on tire

$$\sin XY = \frac{\gamma \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \gamma^2)}} = \frac{\rho\rho' \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{\gamma},$$

ou bien

$$\sin XY = \frac{\gamma}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)}} = \frac{\rho\rho'}{\gamma}.$$

APPLICATIONS.

I. *Section d'une surface du second degré.* — On trouve pour équation

$$\rho^2 X^2 (A\gamma^2 + A''\alpha^2 - 2B'\alpha\gamma) + \rho'^2 (A'\gamma^2 + A''\beta^2 - 2B\beta\gamma)$$
$$+ 2\rho\rho' XY (B''\gamma^2 - B\alpha\gamma - B'\gamma\beta + A''\alpha\beta)$$
$$+ 2\rho X (C\gamma^2 - C''\alpha\gamma + B'q\gamma - A''q\alpha)$$
$$+ 2\rho' Y (C'\gamma^2 - C''\beta\gamma + Bq\gamma - A''q\beta)$$
$$+ D''\gamma^2 + A''q^2 + 2C''q\gamma = 0;$$

l'équation de la surface étant

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

II. D'après cela, on peut résoudre la question 824 (*Nouvelles Annales*, 1867, p. 432), qui consiste à déterminer les quantités $\frac{1}{R_1^2 R_2^2}$ et $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}$, en indiquant par R_1 et R_2 les demi-axes de la conique d'intersection.

De plus, on admet que les axes Ox, Oy, Oz sont rectangulaires; donc

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

L'équation de l'intersection est

$$aX^2 + a'Y^2 + 2bXY + 2cX + 2c'Y + d = 0,$$

en posant, comme on l'a vu,

$$a = \rho^2 (A\gamma^2 + A''\alpha^2 - 2B'\alpha\gamma) \ldots .$$

Ensuite, quel que soit l'angle XY, on sait que, si l'on pose

$$G = \frac{2bcc' - ac'^2 - a'c^2}{b^2 - aa'} - d^2,$$

et

$$P^2 = (a + a' - 2b\cos XY)^2 + 4(b^2 - aa')\sin^2 XY,$$

on aura

$$\frac{G}{R_1^2} = \frac{a + a' - 2b\cos XY + P}{2\sin^2 XY}, \quad \frac{G}{R_2^2} = \frac{a + a' - 2b\cos XY - P}{2\sin^2 XY},$$

d'où l'on tire

$$G\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) = \frac{a + a' - 2b\cos XY}{\sin^2 XY}, \quad \frac{G^2}{R_1^2 R_2^2} = \frac{aa' - b^2}{\sin^2 XY}.$$

Pour calculer G, nous chercherons d'abord

$$b^2 - aa' = M\gamma^2,$$

en posant

$$\begin{aligned} M = {} & \gamma^2(B''^2 - AA') + \beta^2(B'^2 - AA'') + \alpha^2(B^2 - A'A'') \\ & + 2\alpha\beta(A''B'' - BB') + 2\alpha\gamma(A'B' - BB'') \\ & + 2\beta\gamma(AB - B'B''). \end{aligned}$$

D'après cela, nous arriverons à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & -(G + D\gamma^2)M\gamma^2 \\ & \quad = (A\gamma^2 + A''\alpha^2 - 2B'\alpha\gamma)(C'\gamma^2 - C''\beta\gamma + Bq\gamma - A''q\beta)^2 \\ & \qquad + (A'\gamma^2 + A''\beta^2 - 2B\beta\gamma)(C\gamma^2 - C''\alpha\gamma + B'q\alpha - A''q\alpha)^2 \\ & \qquad + 2(B\alpha\gamma + B'\beta\gamma - B''\gamma^2 - A''\alpha\beta) \\ & \qquad\quad \times (C\gamma^2 - C''\alpha\gamma + B'q\gamma - A''q\alpha) \\ & \qquad\quad \times (C'\gamma^2 - C''\beta\gamma + Bq\gamma - A''q\beta) \\ & \qquad + M\gamma^2(A''q^2 + 2q\gamma C''). \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de calculer, dans cette égalité, le coefficient de q^2, celui de $2q$ et le terme indépendant. Or, si l'on pose

$$m = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'',$$

$$K = C(A'A'' - B^2) + C'(BB' - A''B'') + C''(BB'' - A'B'),$$

. . . .

on arrivera enfin au résultat suivant

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{G}{\gamma^2}+D\right) M = mq^2 &- 2q(K\alpha + K'\beta + K''\gamma) \\
&+ \alpha^2(A''C'^2 + A'C''^2 - 2BC'C'') \\
&+ \beta^2(AC''^2 + A''C^2 - 2B'CC'') \\
&+ \gamma^2(A'C^2 + AC'^2 - 2B''CC') \\
&+ 2\alpha\beta\,[C''(BC + B'C' + B''C'') - A''CC'] \\
&+ 2\alpha\gamma\,[C'(BC + B'C' + B''C'') - A'CC''] \\
&+ 2\beta\gamma\,[C(BC + B'C' + B''C'') - AC'C''].
\end{aligned}
$$

Nous pouvons donc poser $G = \varphi\gamma^2$, la quantité φ étant connue et symétrique en α, β, γ.

Maintenant on trouvera, après quelques réductions,

$$\frac{1}{R_1^2 R_2^2} = -\frac{M}{\varphi^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\varphi^2}{R_1^2 R_2^2} + M = 0;$$

de même

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right) = \alpha^2(A'+A'') &+ \beta^2(A''+A) + \gamma^2(A+A') \\
&- 2B\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2B''\alpha\beta.
\end{aligned}
$$

M. Painvin écrit le second membre sous la forme

$$A(1-\alpha^2) + A'(1-\beta^2) + A''(1-\gamma^2) - 2B\beta\gamma - 2B'\alpha\gamma - 2B''\alpha\beta,$$

ce qui revient au même, à cause de la relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1,$$

car

$$1-\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2, \ldots.$$

III. *Sections circulaires.* — Dans l'équation de la section plane d'un ellipsoïde représenté par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les coefficients de X^2 et de Y^2 sont

$$\frac{c^2\gamma^2 + a^2\alpha^2}{a^2c^2(\gamma^2+\alpha^2)}, \qquad \frac{c^2\gamma^2 + b^2\beta^2}{b^2c^2(\gamma^2+\beta^2)},$$

et celui de $2XY$ est $\frac{\rho'\alpha\beta}{c^2\gamma^2}$. On aura donc, pour une section circulaire,

$$\frac{c^2\gamma^2 + a^2\alpha^2}{c^2a^2(\gamma^2+\alpha^2)} = \frac{c^2\gamma^2 + b^2\beta^2}{c^2b^2(\gamma^2+\beta^2)};$$

et aussi, en divisant tout par l'un de ces coefficients égaux,

$$\frac{\varphi\rho'\alpha\beta}{c^2\gamma^2} \cdot \frac{a^2c^2(\gamma^2+\alpha^2)}{c^2\gamma^2 + a^2\alpha^2} = \cos XY = \frac{\varphi\rho'\alpha\beta}{\gamma^2}.$$

Si l'on supprime, comme cela semble naturel, le facteur commun $\alpha\beta$, il reste

$$\frac{a^2(\gamma^2+\alpha^2)}{c^2\gamma^2 + a^2\alpha^2} = 1,$$

d'où il faudrait conclure

$$a^2 = c^2.$$

L'erreur vient de ce qu'on a eu tort de supprimer les facteurs inconnus α, β; il faut donc supposer que l'un de ces facteurs est nul, ce qui ramène nécessairement aux deux systèmes connus de sections circulaires.

IV. En général, on peut faire, dans le plan sécant, toutes les constructions que l'on voudra, par les calculs de la géométrie à deux dimensions, relativement aux coordonnées X et Y. Ensuite, après avoir obtenu un certain résultat, on pourra revenir à l'espace en posant, pour

les points ainsi déterminés

$$X = \frac{x}{\rho}, \quad y = \frac{y}{\rho'},$$

ce qui donnera une relation entre x et y, relation que l'on joindra à l'équation du plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = q.$$

On résoudra ainsi, par exemple, le problème suivant : *Trouver la bissectrice d'un angle donné dans l'espace.*

DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA FORMULE DE MOIVRE, EXPRESSIONS DE $\sin(a+b)$ ET DE $\cos(a+b)$;

PAR M. A. LEMONNIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Napoléon.

On sait que, si les côtés d'une ligne brisée dans un plan sont les modules d'expressions imaginaires, et leurs angles de direction à l'égard d'une direction initiale les arguments de ces expressions, la somme des expressions a pour module la résultante de la ligne brisée, et pour argument son angle de direction.

Cela subsiste, quand on attribue à des côtés des modules négatifs, pourvu que les arguments se rapportent à des directions opposées à celles des côtés.

Soit considérée une ligne brisée de deux côtés dont les modules soient $\cos b$ et $\sin b$, et les arguments a et $a + \frac{\pi}{2}$; la résultante aura l'unité pour module et la somme $a + b$ pour argument.

Donc on aura

$$\begin{aligned}\cos(a+b)+i\sin(a+b)\\ &= \cos b\,(\cos a + i\sin a) + \sin b\left[\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &= \cos b(\cos a + i\sin a) + \sin b(-\sin a + i\cos a)\\ &= \cos b(\cos a + i\sin a) + i\sin b(\cos a + i\sin a)\\ &= (\cos b + i\sin b)(\cos a + i\sin a).\end{aligned}$$

C'est la formule de Moivre.

On en déduit

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + i\sin(a+b)\\ &= \cos b\cos a - \sin b\sin a + i(\cos b\sin a + \sin b\cos a).\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 701

(voir 2e série, t. III, p. 176);

PAR M. LIONNET.

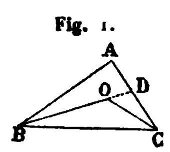
Démontrer, sans admettre aucun postulatum, que l'angle du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés d'un triangle équilatéral excède un demi-angle droit.

I. Considérons d'abord les triangles ABC, DBC qui ont un côté et un angle communs. L'angle BDC, extérieur

au triangle ABD, étant au moins égal à la somme des angles intérieurs A et ABD, si l'on ajoute de part et d'autre la somme des angles DBC, DCB, on trouve que la somme des angles du triangle DBC est au moins égale à celle des angles du triangle ABC.

Les triangles OBC, DBC ayant aussi un côté et un angle communs, on prouverait de même que la somme des

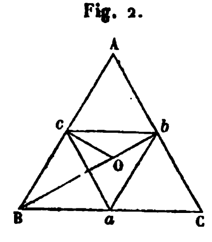
Fig. 1.



angles du premier est au moins égale à celle des angles du second et, à plus forte raison, à celle des angles du triangle ABC. On en conclut ce théorème : *lorsque deux triangles* OBC, ABC *ont un côté commun et que l'un d'eux est intérieur à l'autre, la somme des angles du premier triangle est au moins égale à celle des angles du second.*

II. Considérons les triangles équilatéraux *abc*, ABC, dont l'un a pour sommets les milieux des côtés de l'autre.

Fig. 2.



La somme des angles d'un triangle étant au plus égale à deux droits, l'angle *abc*, que nous désignerons par la lettre x, est au plus égal à $\frac{2^d}{3}$, et, par suite, chacun des angles égaux Abc, abC est au moins égal à $\frac{2^d}{3}$. Cela étant,

si l'angle x est inférieur à $\frac{2^d}{3}$, le triangle abc peut être placé dans le triangle Abc, de manière que ces deux triangles aient le côté bc commun; et, en vertu du principe précédent (I), on aura

$$3x > Abc + Acb + A = 2^d - x + A;$$

d'où l'on déduit

$$x > \frac{1^d}{2} + \frac{A}{4};$$

donc, dans tous les cas, l'*angle x excède un demi-angle droit.*

Remarque. — Ce principe est un cas particulier du théorème suivant dont la démonstration ne s'appuie sur aucun postulatum.

III. Théorème. — *L'angle du polygone ayant pour sommets les milieux des côtés d'un polygone régulier excède un demi-angle droit.*

La démonstration étant faite pour un triangle équilatéral (II), supposons que AB et AC (*fig.* 2) soient deux côtés consécutifs d'un polygone régulier P d'un nombre n de côtés supérieur à 3. La droite bc sera l'un des côtés du polygone régulier p ayant pour sommets les milieux des côtés du polygone P. De plus, le point O étant le centre commun des deux polygones, les droites Ob, Oc seront des rayons du polygone p et des apothèmes du polygone P. Enfin on aura l'angle $bOc = \frac{4^d}{n}$ et, en désignant par x l'angle du polygone p,

$$Obc = Ocb = \frac{1}{2}x, \quad Abc = Acb = 1^d - \frac{1}{2}x.$$

Cela étant, si l'angle Obc égale ou excède son complément Abc, l'angle x, double de Obc, égale ou excède un droit et, par conséquent, excède un demi-angle droit.

Si l'angle Obc est moindre que Abc, le triangle Obc peut être placé dans le triangle Abc de manière que ces deux triangles aient le côté bc commun, et, en vertu du principe précédent (I), on a

$$x + \frac{4^{\rm d}}{n} > 2^{\rm d} - x + A,$$

d'où l'on déduit

$$x > 1^{\rm d} - \frac{2^{\rm d}}{n} + \frac{A}{2}.$$

Or, pour $n =$ ou > 4, la différence $1^{\rm d} - \frac{2^{\rm d}}{n}$ égale ou excède $\frac{1^{\rm d}}{2}$; donc, dans tous les cas, *x excède un demi-angle droit.*

Remarque. — Lorsque, dans la géométrie *non euclidienne* (*), on fait l'hypothèse que la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, il est facile de démontrer que l'angle d'un polygone régulier de n côtés diminue et tend vers zéro, quand son rayon augmente au delà de toute limite, et que ce même angle augmente et tend vers $2^{\rm d} - \frac{4^{\rm d}}{n}$, quand le rayon du polygone diminue et tend vers zéro. Il en résulte que si, par exemple, l'angle du triangle équilatéral ABC est excessivement petit, l'angle du triangle abc excède néanmoins un demi-angle droit, ce qui exige que le rapport des côtés bc, BC tende vers zéro, lorsque le rayon OB et, par suite, le côté BC croissent au delà de toute limite.

(*) On peut consulter une brochure très-intéressante ayant pour titre: *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, par Lobatcheffsky, traduite de l'allemand par M. *Hoüel.*

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS PÉRIODIQUES;

PAR MM. A. LAISANT ET ÉTIENNE BEAUJEUX (*).

1. Exprimer un nombre entier dans le système de numération dont la base est B, c'est mettre ce nombre sous la forme $\alpha_0 + \alpha_1 B + \ldots + \alpha_n B^n$, les coefficients α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ étant tous inférieurs à B. Ces coefficients sont dans le système considéré les *chiffres* du nombre en question, lequel s'écrit : $\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0$. Nous aurons occasion d'employer cette notation plus loin, notation qu'il ne faudrait pas confondre avec le produit des nombres $\alpha_n \ldots \alpha_0$. Cette confusion ne saurait être faite dans ce qui va suivre, le genre de la question indiquant toujours suffisamment de quoi il s'agit.

Il est clair que ce problème : *écrire un entier dans un système de numération donné*, conduit toujours à une solution unique parfaitement limitée. Pour l'obtenir, on divise le nombre donné par la base B; le reste de la division est α_0; on opère de même sur le quotient obtenu, et ainsi de suite.

2. Nous dirons qu'exprimer une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ dans le système de numération dont la base est B, c'est la mettre sous la forme

$$\frac{\alpha_1}{B} + \frac{\alpha_2}{B^2} + \ldots,$$

(*) Plusieurs théorèmes de cet article sont connus; nous l'avons néanmoins inséré *in extenso* pour en faciliter la lecture (*voir* les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. I, p. 457; t. II, p. 522; t. V, p. 397; t. VIII, p. 50). J. B.

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ étant plus petits que B. La fraction s'écrira

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots .$$

On arrivera à ce résultat en multipliant p par B et en divisant le produit par q; le quotient sera le premier chiffre α_1; on multipliera le reste par B, on divisera encore par q, et ainsi de suite. Voyons à quelle condition l'opération peut se terminer : supposons qu'on ait

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1}{B} + \frac{\alpha_2}{B^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{B^n} = \frac{\alpha_1 B^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{B^n} = \frac{P}{B^n}.$$

Pour que cette égalité ait lieu, il faut que P et B^n soient des équimultiples de p et q; par conséquent, il faut que q ne contienne que des facteurs premiers appartenant à B; s'il en est ainsi, l'opération aura donné successivement tous les chiffres $\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Si q renferme au contraire d'autres facteurs premiers que ceux de B, l'opération ne saurait se terminer; mais comme les chiffres $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ sont inférieurs à B, il faudra bien qu'on finisse par trouver un de ceux déjà obtenus; à partir de là, toute la suite se reproduira dans le même ordre : l'opération et le résultat lui-même prendront un caractère *périodique*. Le nombre formé par les chiffres qui se reproduisent périodiquement au quotient s'appelle la *période*.

Cette période peut commencer à être obtenue dès l'origine des opérations, ou bien ne prendre naissance qu'après une première série de divisions qui ne se reproduiront pas. Dans le premier cas la fraction est *périodique simple*, et dans le second *périodique mixte*.

3. Ce dernier genre de fractions, le plus général, a évidemment une expression de la forme

$$\frac{P}{B^m} + \frac{\alpha_1}{B^{m+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{B^{m+n}} + \frac{\alpha_1}{B^{m+n+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{B^{m+2n}} + \ldots$$

ou

$$\frac{P}{B^m} + \frac{\alpha_1 B^{n-1} + \alpha_2 B^{n-2} + \ldots + \alpha_n}{B^m (B^n - 1)} = \frac{(B^n - 1) P + P'}{B^m (B^n - 1)},$$

P' représentant la période et P la partie non périodique.

Supposons que le dénominateur q de la fraction à convertir ne contienne aucun facteur premier appartenant à B; la fraction ci-dessus étant égale à $\frac{p}{q}$, il est clair que son numérateur devra être divisible par B^m et conséquemment par B. Donc $P' - P$ doit être divisible par B; mais c'est impossible, car il faudrait que $P' - P$ fût terminé par un zéro dans le système de numération considéré, c'est-à-dire que le dernier chiffre de P et celui de P' fussent identiques; la période aurait donc commencé plus tôt qu'on ne l'a supposé. Ainsi : *une fraction dont le dénominateur n'a aucun facteur commun avec la base ne peut donner lieu qu'à une fraction périodique simple.*

4. Si le dénominateur q renferme au contraire des facteurs communs à B, il est clair qu'on peut prendre m assez grand pour que, la fraction $\frac{B^m}{q}$ étant réduite à sa plus simple expression $\frac{p'}{q'}$, q' ne contienne plus aucun facteur de B. Cela posé, écrivons

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{B^m} \frac{pB^m}{q} = \frac{1}{B^m} \frac{pp'}{q'} = \frac{1}{B^m} \frac{p''}{q'}.$$

$\frac{p''}{q'}$ sera ou une expression fractionnaire, ou une fraction, mais ne pourra donner lieu, en dehors de la partie entière, qu'à une fraction périodique simple. Le tout, divisé par B^m, ce qui se fera par un simple déplacement de la virgule, fournira une fraction périodique mixte.

On voit ainsi que la recherche de toute fraction périodique mixte peut être ramenée à celle d'une fraction périodique simple. C'est de cette dernière espèce que nous allons nous occuper dans tout ce qui va suivre.

5. *Une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ donnant lieu à une période de n chiffres, toute autre fraction irréductible $\frac{p'}{q}$ ayant même dénominateur fournira aussi une période de n chiffres.*

En effet, dans le cas d'une fraction périodique simple, le seul qui nous intéresse, l'expression du n° 23 ci-dessus prend la forme $\frac{P}{B^n - 1}$, P représentant la période. On peut donc dire que si la fraction à convertir est mise sous la forme $\frac{P'}{B^{n'} - 1}$ la question sera résolue : P' sera la période et n' le nombre des chiffres de cette période (y compris, bien entendu, les zéros qui peuvent se trouver à sa gauche).

Or il suffit évidemment pour cela que $B^{n'} - 1$ soit un multiple de q, la fraction donnée étant irréductible. La valeur du numérateur n'y fait rien. Donc à un même dénominateur q correspondra toujours un même nombre de chiffres n à la période.

De ce qui précède, on peut conclure que l'équation indéterminée $B^x - 1 = m.q$ (*) admet toujours au moins une racine entière inférieure à q. Cette racine donne le nombre des chiffres de la période si elle est seule; en tous cas, ce nombre est toujours égal à la plus petite des racines entières. On peut remarquer enfin qu'une racine n de

(*) Nous employons la notation $m.q$ comme représentant *un multiple de q*.

l'équation ci-dessus étant donnée, tous les multiples de n seront aussi racines, car $B^{kn} - 1$ est un multiple de $B^n - 1$.

6. Soit la fraction $\frac{p_1}{q}$ qui donne n chiffres à la période. En désignant par $p_2, p_3, \ldots, p_n$, les restes, en nombre $n-1$, successivement obtenus dans le cours de l'opération, nous aurons

$$\begin{aligned} Bp_1 &= \alpha_1 q + p_2, \\ Bp_2 &= \alpha_2 q + p_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Bp_{n-1} &= \alpha_{n-1} q + p_n, \\ Bp_n &= \alpha_n q + p_1. \end{aligned}$$

On voit que si l'on avait voulu convertir la fraction $\frac{p_2}{q}$, il eût suffi de commencer par la division indiquée par la deuxième égalité ci-dessus; comme période, au lieu de $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$, on aurait eu $\alpha_2 \ldots \alpha_n \alpha_1$; il en est de même pour toutes les fractions $\frac{p_3}{q} \ldots \frac{p_n}{q}$, et on voit sans peine que toutes ces fractions sont irréductibles. Ainsi toute opération pareille à celle ci-dessus permet de convertir à la fois n fractions irréductibles différentes ayant q pour dénominateur. De plus, toute fraction non encore obtenue pourra l'être par une opération analogue. Par conséquent le nombre total $\varphi(q)$ des fractions irréductibles ayant q pour dénominateur est divisible par n, puisque ces fractions peuvent être réunies en divers groupes, chacun comprenant n d'entre elles. Soit donc $\varphi(q) = kn$. Nous aurons

$$B^{\varphi(q)} - 1 = B^{kn} - 1 = m.(B^n - 1) = m.q,$$

puisque $B^n - 1 = m.q$.

On peut évidemment énoncer ce résultat comme il suit :

B *et* q *étant premiers entre eux, et* $\varphi(q)$ *représentant le nombre des fractions irréductibles ayant* q *pour dénominateur, c'est-à-dire le nombre des entiers premiers avec* q*, et non supérieurs à ce nombre,* $B^{\varphi(q)}-1$ *sera un multiple de* q. (Théorème de Fermat généralisé.)

7. Si nous supposons q premier, on a $\varphi(q)=q-1$. Ainsi B *n'étant pas multiple du nombre premier* q, $B^{q-1}-1$ *sera multiple de* q. (Théorème de Fermat.)

8. Soient P, P′, P″... toutes les périodes fournies par les fractions irréductibles ayant q pour dénominateur; ces périodes, comme on l'a vu plus haut (6), se divisent en groupes de n chacune, et dans chaque groupe, toutes les périodes s'obtiennent par les permutations circulaires des chiffres de l'une quelconque d'entre elles. Nous aurons

$$\frac{p}{q}=\frac{P}{B^n-1},$$
$$\frac{p'}{q}=\frac{P'}{B^n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si nous ajoutons ces égalités, la somme des premiers membres donnera $\frac{1}{2}\varphi(q)$; en effet à $\frac{p}{q}$ correspond $\frac{q-p}{q}$, si bien que les fractions peuvent être groupées par deux, la somme de chaque couple étant égale à 1 ; donc la somme de toutes les fractions est égale à la moitié de leur nombre.

Désignant par ΣP la somme $P+P'+\ldots$, nous aurons donc

$$\frac{1}{2}\varphi(q)=\frac{\Sigma P}{B^n-1}.$$

9. Considérons la fraction $\frac{1}{q}$ qui donne n chiffres à la période, et soit P cette période, ou $a_1 a_2 \ldots a_n$ en l'écrivant dans le système de numération considéré. On voit que les divers nombres $a_2 \ldots a_n a_1$, $a_3 \ldots a_1 a_2, \ldots,$ $a_n a_1 \ldots a_{n-1}$ seront des multiples de $a_1 a_2 \ldots a_n$; c'est une propriété assez remarquable de la période obtenue, propriété qui donne la solution de ce problème : Écrire un nombre de n chiffres tel, que les nombres formés par les permutations circulaires des chiffres soient des multiples du premier.

10. *Soit q un nombre premier qui donne lieu à une période de n chiffres, et soit α un diviseur de n; la période sera divisible par* $B^\alpha - 1$, car on aura

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{B^n - 1} = \frac{P}{(B^\alpha - 1)Q}.$$

Or q doit diviser $(B^\alpha - 1)Q$ et par suite $B^\alpha - 1$ ou Q; mais il ne peut diviser $B^\alpha - 1$, sans quoi la période n'aurait que α chiffres; donc il divise Q; et comme la fraction doit pouvoir se réduire à $\frac{p}{q}$, il faut que le facteur $B^\alpha - 1$ entre aussi au numérateur P.

11. Si nous supposons en particulier que le nombre des chiffres de la période soit pair et égal à $2n$, la période sera divisible par $B^n - 1$, d'après ce qui précède. On aura donc, en appelant $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ ses différents chiffres,

$$a_1 B^{2n-1} + a_2 B^{2n-2} + \ldots + a_{2n} = m.(B^n - 1),$$

ou

$$B^n(a_1 B^{n-1} + a_2 B^{n-2} + \ldots + a_n) + a_{n+1} B^{n-1} + \ldots + a_{2n} = m.(B^n - 1).$$

$$(B^n - 1)(a_1 B^{n-1} + \ldots + a_n)$$
$$+ (a_1 + a_{n+1}) B^{n-1} + \ldots + (a_n + a_{2n}) = m.(B^n - 1),$$
$$(a_1 + a_{n+1}) B^{n-1} + \ldots + (a_n + a_{2n}) = m.(B^n - 1).$$

Si l'on remarque que $a_1, \ldots, a_{2n}$ sont tous inférieurs à B, on verra sans peine que ce dernier multiple de $B^n - 1$ ne peut être autre que $B^n - 1$ lui-même, ce qui exige qu'on ait

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_{n+1} = B - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n + a_{2n} \;= B - 1. \end{array} \right.$$

Donc : *Un dénominateur premier donnant lieu à une période d'un nombre pair de chiffres, la somme des chiffres de même rang dans chaque demi-période est égale à* $B - 1$.

On a alors

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p}{q} = \dfrac{(B^n - 1)(a_1 B^{n-1} + \ldots + a_n) + (B^n - 1)}{B^{2n} - 1} \\ \quad = \dfrac{a_1 B^{n-1} + \ldots + a_n + 1}{B^n + 1}. \end{array} \right.$$

12. Si l'on ajoute les diverses relations (1) du numéro précédent, on a

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = n(B - 1),$$

formule qui nous donne la somme des chiffres de la période.

Cette somme, on le voit, est tout à fait indépendante du numérateur de la fraction.

13. Supposant toujours le dénominateur premier et le

nombre des chiffres de la période pair, considérons les divers numérateurs $p_1, p_2 \ldots$ des fractions que l'on convertit par une même opération, c'est-à-dire les divers restes obtenus successivement, restes qui ne sont autres que ceux obtenus en divisant p_1, $p_1 B$, $p_1 B^2, \ldots$ par q.

Appelons toujours $2n$ le nombre des chiffres de la période, et prenons deux restes p_1, p_{n+1}, distants de n rangs en suivant l'ordre où on les a obtenus. Nous aurons [n° **11**, relation (2)]

$$\frac{p_1}{q} = \frac{a_1 B^{n-1} + \ldots + a_n + 1}{B^n + 1},$$

$$\frac{p_{n+1}}{q} = \frac{a_{n+1} B^{n-1} + \ldots + a_{2n} + 1}{B^n + 1}.$$

Ajoutant, et tenant compte des relations (1) du n° **11**, il vient

$$\frac{p_1 + p_{n+1}}{q} = 1 \qquad p_1 + p_{n+1} = q.$$

Donc : *Si l'on range les restes dans l'ordre où on les obtient, à partir d'un instant quelconque, et qu'on sépare cette suite de $2n$ nombres en deux groupes égaux, la somme de deux nombres du même rang dans chaque groupe est égale au dénominateur q.*

Ces restes ou résidus jouissent de propriétés remarquables dont celle-ci est un exemple. Mais nous ne saurions chercher à les développer ici sans sortir de notre sujet.

14. Supposons que le dénominateur q soit premier et donne lieu à une période de $q - 1$ chiffres. Soit en particulier $abc \ldots fgh$ la période fournie par $\frac{1}{q}$. Écrivons

les divers nombres

$$\begin{array}{r} abc\ldots fgh \\ abc\ldots fg \\ abc\ldots f \\ \ldots\ldots \\ abc \\ ab \\ a, \end{array}$$

et additionnons-les à la manière ordinaire; soit S la somme.

Nous avons

$$\frac{B}{q} = a, bc\ldots\ldots\ldots = a + \frac{b}{B} + \frac{c}{B^2} + \ldots$$

$$\frac{B^2}{q} = ab, c\ \ldots\ldots\ldots = ab + \frac{c}{B} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{B^{q-1}}{q} = ab\ldots h, ab\ldots = ab\ldots h + \frac{a}{B} + \frac{b}{B^2} + \ldots.$$

D'où par addition

$$\frac{B}{q}\frac{B^{q-1}-1}{B-1} = S + (a + b\ldots + h)\left(\frac{1}{B-1}\right).$$

Mais $q - 1$ est pair puisque q est premier. Nous avons donc (n° 12)

$$a + b + \ldots + h = \frac{1}{2}(q-1)(B-1),$$

et il vient

$$(1) \qquad \frac{B}{q}\frac{B^{q-1}-1}{B-1}P = S + \frac{1}{2}(q-1).$$

Si l'on appelle P la période, on a

$$\frac{1}{q} = \frac{P}{B^{q-1}-1}, \quad \text{donc} \quad P = \frac{B^{q-1}-1}{q}$$

et

(2) $$\frac{B}{B-1}P = S + \frac{1}{2}(q-1).$$

Si dans l'addition qui a donné S on avait supprimé le premier des nombres écrits ci-dessus, c'est-à-dire la période elle-même, on aurait trouvé une somme $S' = S - P$. La relation (2) donne alors

(3) $$\frac{P}{B-1} = S' + \frac{1}{2}(q-1),$$

$$P - \frac{1}{2}(q-1)(B-1) = S'(B-1),$$

ou

(4) $$P - (a + b + \ldots + h) = S'(B-1).$$

Ainsi *la période diminuée de la somme de ses chiffres significatifs a pour expression* $S'(B-1)$.

Si dans la relation (3) ci-dessus on rétablit la valeur de $P = \frac{B^{q-1}-1}{q}$ et qu'on effectue la division de $B^{q-1}-1$ par $B-1$, on trouve

(5) $$B^{q-2} + B^{q-3} + \ldots + B + 1 = q\left[S' + \frac{1}{2}(q-1)\right],$$

ce qui montre que *le nombre* $q\left[S' + \frac{1}{2}(q-1)\right]$ *s'obtient en écrivant* $q-1$ *fois le chiffre* 1 *dans le système de numération considéré.*

En partant de $\frac{p}{q}$ au lieu de $\frac{1}{q}$ on aurait trouvé la relation (2) ci-dessus. Quant aux autres, elles seraient modifiées, et conduiraient à des conséquences analogues, en remplaçant P par $P \times p$. Nous ne les développerons pas ici, pour éviter de trop nous étendre.

15. *Si deux nombres q et q' premiers entre eux, étant pris comme dénominateurs, donnent séparément, l'un n chiffres, et l'autre n' chiffres à la période, le produit qq' pris comme dénominateur donnera un nombre de chiffres égal au plus petit multiple de n et n'.*

En effet, si $\frac{1}{q}$ donne n chiffres, c'est que $B^n - 1$ est divisible par q, sans qu'aucune des puissances inférieures à n jouisse de cette propriété. On a donc $B^n = m.q + 1$.

De là

$$B^{n+1} = m.q + B,$$
$$B^{n+2} = m.q + B^2,$$
$$B^{n+3} = m.q + B^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B^{2n} = m.q + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit donc qu'il n'y a que les puissances de la forme B^{kn} qui soient égales à un multiple de $q + 1$. De même il n'y a que les puissances de la forme $B^{k'n'}$ qui jouissent d'une propriété pareille par rapport à q'. Or il s'agit de trouver une puissance x de B, telle que $B^x - 1$ soit multiple de qq', et par conséquent divisible par q et q' séparément, puisque ces deux nombres n'ont aucun facteur commun; x devra donc être à la fois multiple de n et de n', et le plus petit de ces multiples sera le nombre de chiffres de la période.

Il est aisé de voir que ce théorème s'étend au cas de plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux; le raisonnement serait analogue.

16. *q étant un nombre premier, si $\frac{1}{q}$ donne n chiffres à la période, $\frac{1}{q^2}$ en donnera nq.*

On verrait comme ci-dessus (15) que le nombre cherché doit être multiple de n. Désignons-le par nx. Il faut que $B^{nx} - 1$ soit divisible par q^2; si nous divisons $B^{nx} - 1$ par $B^n - 1$ qui contient déjà le facteur q_1, le quotient devra donc être encore multiple de q. Or, ce quotient est

$$B^{n(x-1)} + B^{n(x-2)} + \ldots + B^{2n} + B^n + 1.$$

Tous les termes sont de la forme $m.q + 1$; le quotient est donc de la forme $m.q + x$, et l'on voit qu'il faut $x = q$ au moins pour qu'il soit divisible par q, ce qui donne nq comme nombre des chiffres de la période.

Remarque. — Ce raisonnement suppose que $B^n - 1$ est divisible par q sans l'être par q^2, sans quoi le nombre des chiffres de la période serait évidemment le même. Dans ce qui va suivre il faut admettre encore la même restriction, étendue aux puissances supérieures. Mais la plus haute puissance de q qui entre dans $B^n - 1$ étant considérée comme un simple facteur premier Q, les conclusions seraient vraies pour les puissances de Q.

17. *q étant premier, si $\frac{1}{q}$ donne n chiffres à la période, $\frac{1}{q^a}$ en donnera $q^{a-1} n$.*

En effet, si nous considérons $\frac{1}{q^3}$, le nombre X cherché doit être tel que $B^X - 1$ soit divisible par q^3 et par suite par q^2. Il est donc de la forme Knq d'après le n° précédent, et le quotient $\frac{B^{knq} - 1}{B^{nq} - 1}$ doit être divisible par q; on démontrerait comme plus haut que cela conduit à

$$k = q, \quad \text{d'où} \quad X = nq^2.$$

Partant de là on verrait d'une façon analogue que $\frac{1}{q^4}$

donne nq^3 chiffres, et ainsi de suite; et généralisant la loi à la manière ordinaire, on arriverait à conclure que $\frac{1}{q^a}$ donne nq^{a-1} chiffres.

18. *Soit* N *un nombre composé égal à* $A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots$, A, B, C... *représentant ses divers facteurs premiers* (*avec la restriction du n°* 16 *ci-dessus*); *si les fractions* $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \ldots$ *donnent respectivement* $a, b, c, \ldots$ *chiffres à leurs périodes, et qu'on désigne par* M *le plus petit multiple de* $a, b, c \ldots$, *la fraction* $\frac{1}{N}$ *donnera un nombre de chiffres égal au plus à*

$$M \times A^{\alpha-1} \times B^{\beta-1} \times C^{\gamma-1} \times \ldots = N \times \frac{M}{ABC\ldots}.$$

En effet (17) la fraction

$$\frac{1}{A^\alpha} \text{ donnerait } aA^{\alpha-1} \text{ chiffres,}$$

$$\frac{1}{B^\beta} \text{ donnerait } bB^{\beta-1} \text{ chiffres,}$$

et ainsi de suite.

Pour avoir le nombre cherché, il faudra donc (15) prendre le plus petit multiple de ces nombres, ce qui donne au plus l'expression indiquée ci-dessus.

Si tous les nombres $a, b, c, \ldots$ étaient premiers entre eux deux à deux, et premiers aussi deux à deux avec tous les facteurs A, B, C, ..., le nombre cherché serait exactement

$$a \times b \times c \times \ldots \times A^{\alpha-1} \times B^{\beta-1} \times C^{\gamma-1} \ldots$$
$$= a \times b \times c \times \ldots \times \frac{N}{A \times B \times C \times \ldots}.$$

Pour terminer sans entrer dans de trop longs développements, nous énonçons ici quelques questions dont les solutions s'obtiendront à peu de frais. La plupart sont des corollaires immédiats de ce qui précède.

I. Soit q un nombre premier tel que $\frac{1}{q}$ donne $q-1$ chiffres à la période. Cette période renfermera un nombre de zéros égal au quotient entier obtenu en divisant q par la base.

II. Le dénominateur q n'étant pas premier, supposons que le nombre des chiffres de la période fourni par $\frac{1}{q}$ soit $\varphi(q)$, défini comme on l'a vu au n° 6. Si l'on fait la somme S comme au n° 14, qu'on désigne par B la base et par P la période, démontrer qu'on aura

$$\frac{B}{B-1}P = S + \frac{1}{2}\varphi(q).$$

En déduire des relations analogues à celles du n° 14.

III. q étant premier avec 10, le dernier chiffre de la période décimale fourni par $\frac{1}{q}$ ne peut être qu'un des suivants 1, 3, 7, 9.

IV. Sachant que le dénominateur donné q fournit $q-1$ chiffres à la période dans le système décimal, trouver la période fournie par $\frac{1}{q}$ sans faire une seule division.

V. Une fraction irréductible dont le dénominateur est de la forme $2^n \times p$, p étant premier, donne lieu à une fraction décimale périodique mixte où le nombre des chiffres de la période est pair. Démontrer que la somme du dernier chiffre de la partie non périodique avec le

dernier chiffre de la première demi-période est égale à 4 ou à 14.

VI. Soit une fraction décimale périodique due à un dénominateur de la forme $2^n \times 5^{n'} \times q$, le nombre q étant premier; supposons que la période soit composée de kp chiffres. Désignons par Π le nombre formé par la partie non périodique suivie de la période, et par P la partie non périodique. Si l'on forme le nombre $\Pi - P$, qu'on le divise en tranches de p chiffres à partir de la droite (ces tranches pouvant être complètes ou incomplètes), qu'on en fasse la somme, qu'on agisse de même sur cette somme dans le cas où elle aurait plus de p chiffres, et ainsi de suite; on finira toujours par trouver comme résultat un nombre formé en écrivant p fois le chiffre 9.

La même propriété s'applique par conséquent à la période, dans le cas d'une fraction périodique simple.

Étendre ce théorème à une base quelconque de numération, après en avoir convenablement modifié l'énoncé.

SUR LA MÉTHODE DE HUYGHENS POUR CALCULER LES LOGARITHMES;

PAR M. FÉDOR THOMAN.

Soit N le nombre dont on cherche le logarithme et soit

$$\sqrt[n]{N} = f \quad \text{et} \quad \sqrt{f} = g = 1 + \omega,$$

on aura

$$N = (1+\omega)^{2n} \quad \text{et} \quad \log N = 2n\omega\left(1 - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{3} - \frac{\omega^3}{4} + \ldots\right);$$

mais $f = (1+\omega)^2$, donc

$$\left(1-\frac{1}{f}\right) = 2\omega\,\frac{1+\frac{\omega}{2}}{(1+\omega)^2} \quad \text{et} \quad 2\omega = \left(1-\frac{1}{f}\right)\frac{(1+\omega)^2}{1+\frac{\omega}{2}}.$$

En substituant cette valeur de (2ω) dans la formule de $\log N$, on obtient

$$\log N = n\left(1-\frac{1}{f}\right)\left(1+\omega-\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{30}\right.$$
$$\left.-\frac{\omega^5}{30}+\frac{11\,\omega^6}{420}-\frac{2\,\omega^7}{105}+\ldots\right).$$

Cela posé, Huyghens cherche une *expression algébrique* fractionnaire qui, par son développement en série, donne les cinq premiers termes de la série en parenthèse. De plus, comme il y a une infinité de solutions possibles, Huyghens choisit une expression du second degré par rapport à ω, ou du premier degré par rapport à f et g, telle que

$$\frac{\alpha(1+\omega)^2}{1+\omega+\beta\omega^2}+\gamma(1+\omega+\delta\omega^2)$$
$$=1+\omega-\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{30}-\frac{\omega^5}{30}\pm\ldots,$$

d'où

$$\alpha = \frac{17}{20},\quad \beta = \frac{3}{10},\quad \gamma = \frac{10}{27},\quad \delta = -1,$$

et

$$\frac{10}{27}\cdot\frac{(1+\omega)^2}{1+\omega+\frac{3\omega^2}{10}}+\frac{17}{27}(1+\omega-\omega^2)$$
$$=1+\omega-\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{30}-\frac{\omega^5}{30}+\frac{7\,\omega^6}{300}-\frac{4\,\omega^7}{300}+\ldots;$$

et, puisque $g = 1 + \omega$ et $f = g^2$, on aura

$$\frac{200f}{3+3f+4g} - (3+3f-40g)$$
$$= 54\left(1 + \omega - \frac{\omega^2}{6} + \frac{\omega^4}{30} - \frac{\omega^5}{30} + \frac{7\omega^6}{300} - \ldots\right).$$

Par conséquent, si l'on représente par Q la série en parenthèse, on aura

$$\log N = \left(1 - \frac{1}{f}\right)\frac{nQ}{54},$$

exact jusqu'au sixième terme.

On aura de même pour tout autre nombre A, en posant

$$a = \sqrt[n]{A},\ b = \sqrt{a} \text{ et } P = \frac{200a}{3+3a+4b} - (3+3a-40b),$$

$$\log A = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{nP}{54},$$

par conséquent, pour un système quelconque de logarithmes,

$$\frac{\log N}{\log A} = \frac{1-\frac{1}{f}}{1-\frac{1}{a}}\,\frac{Q}{P} = \frac{\left(1-\frac{1}{f}\right)aQ}{(a-1)P}.$$

Huyghens applique sa méthode aux logarithmes vulgaires et cherche les racines en extrayant six fois consécutivement la racine carrée du nombre donné ; il obtient alors

$$a = \sqrt[32]{10} = 1{,}07460\ldots,$$

$$b = \sqrt{a} = 1{,}03663\ldots,$$

$$P = \frac{214{,}9214\ldots}{10{,}37035\ldots} + 35{,}2415 = 55{,}966\ldots;$$

donc

$$(a-1)P = 4{,}17550\ldots$$

et

$$\log N = \left(1 - \frac{1}{f}\right) \frac{aQ}{4,17550\ldots}.$$

La constante de Huyghens est

$$4,17550\,9443116778$$
$$= \left[\frac{200\sqrt[32]{10}}{3+3\sqrt[32]{10}+4\sqrt[64]{10}} - (3+3\sqrt[32]{10}-40\sqrt[64]{10})\right](\sqrt[32]{10}-1).$$

Soit proposé de trouver le logarithme de 2, on cherche

$$f = \sqrt[32]{2} = 1,02189\,7\ldots, \qquad 1 - \frac{1}{f} = 0,02142\,7\ldots,$$
$$g = \sqrt{f} = 1,01088\,9\ldots, \qquad Q = 54,5869\ldots;$$

donc

$$aQ\left(1 - \frac{1}{f}\right) = 1,2569\ldots$$

et

$$\log 2 = \frac{1,2569\ldots}{4,1755\ldots} = 0,30102\,99956\,7.$$

Le résultat obtenu à l'aide de la formule et des constantes de Huyghens peut être exact à quinze chiffres, il le sera toujours à une unité du onzième chiffre au moins.

En effet, puisque dans les facteurs en parenthèse on a substitué $\left(\frac{7\omega^6}{300} - \ldots\right)$ à $\left(\frac{11\omega^6}{420} - \ldots\right)$, les valeurs de P et de Q seront trop petites de $\left(\frac{\omega^6}{350} - \ldots\right)$.

Mais comme on peut toujours supposer N entre 1 et 10, l'erreur relative du dénominateur sera $< 0,0^{11}47$, et celle du numérateur sera moindre; par conséquent le résultat obtenu sera trop grand. Si N est près de l'unité, l'erreur sera à son maximum et pourra être d'une unité du onzième chiffre décimal (comme dans l'exemple de Huyghens); à

mesure que le nombre N augmente, l'erreur diminue et finit par devenir nulle, et le logarithme sera exact à une unité du quinzième ordre.

Note. — A propos de la Note de M. Bertrand sur le procédé d'Huyghens pour le calcul des logarithmes, M. Hoüel nous rappelle une méthode encore plus vieille, plus simple et n'exigeant que la connaissance des trois premières règles de l'arithmétique.

Soit, par exemple, à trouver le logarithme de 3. On élèvera 3 aux puissances 2, 4, 8, 10; 20, 40, 80, 100; 200, 400, 800, 1000; etc., en ne conservant, par l'usage de la multiplication abrégée (ou plus simplement en supprimant des chiffres à droite), que le nombre des chiffres nécessaires dans chaque produit pour pouvoir indiquer combien le produit final a de chiffres. Supposons que l'on ait trouvé que 3^{10000} se compose de 4771 chiffres; on en conclut aisément que

$$\log 3 = 0,4771.$$

Cette règle se trouve à la page 7 (et suiv.) de l'*Arithmetica logarithmica* de Briggs, Londres 1624, c'est-à-dire dans la première de toutes les Tables de Logarithmes.

M. Hoüel nous fait remarquer aussi que l'on trouve partout la *Trigonometria Britannica* (la plus belle Table qui ait jamais été publiée) avec le nom de Gellibrand. Or Gellibrand n'a fait que *compléter* la préface, en y ajoutant un traité insignifiant de Trigonométrie sphérique. L'ouvrage est de Briggs, le plus grand calculateur qui ait jamais existé, et qui est mort avant la publication. L'erreur universelle est due à ce que sur le frontispice du volume le nom de Briggs est imprimé en petits caractères et celui de Gellibrand en grosses lettres. A quoi tient la réputation d'un auteur!

J. B.

MÉMOIRE

Sur les symptômes d'imaginarité des racines des équations algébriques;

PAR M. P.-A-G. COLOMBIER,
Licencié ès Sciences, Professeur à Paris.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈME I. — *Soient* : $f(x) = 0$ *une équation algébrique rationnelle et entière ;* a_1, a_2, a_3,..., a_q *des nom-*

bres positifs; $2k_1$ le nombre des variations perdues, lorsqu'on passe de $f(x)$ au produit $(x+a_1)f(x)$; $2k_2$ le nombre analogue lorsqu'on passe de $(x+a_1)f(x)$ à $(x+a_1)(x+a_2)f(x)$;.... Cela posé, je dis que l'équation donnée a au moins $2(k_1+k_2+\ldots+k_q)$ racines imaginaires (ce nombre peut être nul).

Démonstration. — L'équation donnée est du degré m. Les nombres des racines positives, négatives et imaginaires sont respectivement p, n et i. Les nombres des variations de l'équation donnée et de la transformée en $-x$ sont respectivement ν et ν'. Enfin, désignons par $\varphi(x)$ le produit des q facteurs binômes

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_q),$$

et par V le nombre des variations du produit $\varphi(x)f(x)$. Cela étant, on a

$$i = m - (p+n). \tag{1}$$

Les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)f(x)$ ont le même nombre de racines positives. Cette remarque et quelques théorèmes connus donnent

$$p = \text{ ou } < \text{V},$$
$$n = \text{ ou } < \nu',$$
$$\nu + \nu' = \text{ ou } < m,$$
$$\text{V} = \nu - 2(k_1+k_2+\ldots+k_q).$$

Ajoutons ces relations membre à membre, puis en ayant égard à (1), on trouve que

$$i = \text{ ou } > 2(k_1+k_2+\ldots+k_q).$$

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Soient : $f(x)=0$ une équation algébrique rationnelle et entière; $a_1, a_2, \ldots, a_q$ des nom-*

bres positifs; $2k_1+1$ le nombre des variations gagnées lorsqu'on passe de $f(x)$ à $(x-a_1)f(x)$; $2k_2+1$ le nombre analogue lorsqu'on passe de $(x-a_1)f(x)$ à $(x-a_1)(x-a_2)f(x)$;.... Cela posé, l'équation donnée a au moins $2(k_1+k_2+\ldots+k_q)$ racines imaginaires (ce nombre peut être nul).

Démonstration. — Soient : $\psi(x)$ le produit des q facteurs binômes

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_q);$$

V_1 et V_2 les nombres des variations des produits

$$\psi(x)f(x),\quad \psi(-x)f(-x).$$

Si l'on remarque que

$$f(x)\quad \text{et}\quad \psi(x)f(x)$$

ont le même nombre de racines négatives, et si l'on a égard à certaines propositions connues, on pourra écrire

$$n = \text{ ou } < V_2,$$
$$p = \text{ ou } < v,$$
$$V_1+V_2 = \text{ ou } < m+q,$$
$$v+2(k_1+k_2+\ldots+k_q)+q = V_1.$$

Ajoutant ces relations membre à membre, et comparant ensuite le résultat trouvé à (1), il vient

$$i = \text{ ou } > 2(k_1+k_2+\ldots+k_q).$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — Si dans ce dernier théorème on fait $q=1$, on trouve que

$$i = \text{ ou } > 2k_1.$$

Cette relation traduite en langage ordinaire donne lieu

à un théorème découvert par M. Sturm, et dont M. Terquem a donné une autre démonstration dans les *Nouvelles Annales*, t. V, p. 115.

Scolies. — 1° Les nombres k_1, $k_2,\ldots$, k_q ne sont pas généralement les mêmes pour les deux théorèmes précédents. De plus, pour l'un quelconque de ces théorèmes, ces nombres peuvent avoir des valeurs différentes ; par conséquent, dans la pratique, il faudra prendre pour k_1, $k_2,\ldots$, k_q les plus grandes valeurs qu'on pourra leur attribuer.

2° Si les valeurs trouvées pour k_1, $k_2,\ldots$, k_q satisfont à la relation

$$2(k_1 + k_2 + \ldots + k_q) = m,$$

l'équation donnée n'aura que des racines imaginaires.

3° Enfin, si par l'un des théorèmes précédents, on a reconnu que l'équation donnée a au moins μ racines imaginaires; et si par d'autres considérations on sait que cette équation a $m - \mu$ racines réelles, l'équation donnée n'aura que μ racines imaginaires.

Corollaire. — La deuxième de ces remarques peut servir à démontrer très-simplement les propositions suivantes, dont nous supprimons les démonstrations, comptant en cela sur l'intelligence du lecteur.

Une équation algébrique complète, de degré m, n'ayant que des permanences, ou n'ayant que des variations,

$$f(x) = 0,$$

a *toutes* ses racines imaginaires :

1° Si le carré d'un coefficient quelconque est égal au produit des valeurs absolues des coefficients du terme précédent et du terme suivant;

2° Si l'on peut trouver un nombre positif a, tel que l'é-

quation

$$(x \mp a) f(x) = 0$$

n'ait respectivement que des variations, ou que des permanences;

3° Si la valeur absolue du coefficient d'un terme quelconque de rang pair est moindre que la valeur absolue de chacun des coefficients des deux termes qui le comprennent immédiatement.

Application. — On trouve dans le Mémoire de M. Le Verrier, sur la planète Uranus (*Connaissance des temps*, 1849; Additions, p. 174), l'équation du quatrième degré

$$5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0.$$

La seule inspection de cette équation montre que ses coefficients satisfont à l'hypothèse du 3° du corollaire précédent; donc cette équation a *toutes* ses racines imaginaires.

M. Le Verrier a démontré l'imaginarité des racines de cette équation, en faisant usage du célèbre théorème de M. Sturm sur le nombre de racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux nombres donnés. M. E. Prouhet a suivi une voie plus simple que celle prise par M. Le Verrier. Enfin, M. Koralek a calculé les racines de cette équation (*voir* les *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 36).

Théorème III. — *Soit*

$$A_0 x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} + \ldots + A_{2m-1} x + A_{2m} = 0$$

une équation algébrique de degré pair complète, et n'ayant que des permanences. Si le plus petit coefficient des termes de rang impair A_i *est égal ou supérieur au plus grand coefficient des termes de rang pair* A_p, *cette équation a toutes ses racines imaginaires.*

Démonstration. — De ce que l'équation donnée n'a que des permanences, il s'ensuit qu'elle n'a pas de racines positives. Il reste à faire voir que la transformée en $-x$, savoir

$$A_0 x^{2m} - A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} - \ldots - A_{2m-1} x + A_{2m} = 0$$

n'a pas non plus de racines positives, ou, plus généralement, qu'elle n'a pas de racines réelles. En effet, d'après le 1° du corollaire précédent, on a, quelle que soit la valeur réelle, positive ou négative, attribuée à x,

$$x^{2m} - x^{2m-1} + x^{2m-2} - \ldots - x + 1 > 0$$

ou

$$(x^{2m} + x^{2m-2} + \ldots + 1) - (x^{2m-1} + x^{2m-3} + \ldots + x) > 0,$$

et, à cause de l'hypothèse

$$A_i = \text{ ou } > A_p,$$

il s'ensuit que

$$A_i (x^{2m} + x^{2m-2} + \ldots + 1) - A_p (x^{2m-1} + \ldots + x) > 0$$

et *à fortiori*

$$(A_0 x^{2m} + A_2 x^{2m-2} + \ldots + A_{2m}) - (A_1 x^{2m-1} + \ldots A_{2m-1} x) > 0,$$

ou en ordonnant par rapport à x, on a

$$A_0 x^{2m} - A_1 x^{2m-1} + \ldots - A_{2m-1} x + A x_{2m} > 0,$$

quelle que soit la valeur réelle, positive ou négative, attribuée à x; donc il est vrai de dire que l'équation donnée a *toutes* ses racines imaginaires. C. Q. F. D.

Observation. — La démonstration précédente montre que le théorème III subsiste : si l'on change les permanences en variations; si l'équation donnée est incomplète, et si cette circonstance ne tient qu'à l'absence de termes de rang pair.

Application à l'équation du quatrième degré de M. Le Verrier. — La seule inspection de cette équation montre que l'on a

$$A_i = 5797 \quad \text{et} \quad A_p = 4951.$$

Si l'on compare ces deux nombres, on voit que

$$A_i > A_p,$$

donc cette équation du quatrième degré a *toutes* ses racines imaginaires.

Théorème IV. — *Désignons par*

$$f(x) = 0$$

une équation algébrique d'un degré quelconque m, et par

$$\Sigma_{4p}, \quad \Sigma_{4p+1}, \quad \Sigma_{4p+2}, \quad \Sigma_{4p+3}$$

les sommes algébriques des coefficients des termes de $f(x)$ dont les nombres des termes qui les précèdent sont donnés respectivement par les quatre types

$$4p, \quad 4p+1, \quad 4p+2, \quad 4p+3.$$

Cela étant, si l'équation donnée n'a que des racines réelles, on aura

$$(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2})^2 + (\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3})^2 > A_0^2 + A_m^2,$$

A_0 *et* A_m *sont les coefficients des deux termes extrêmes dans* $f(x)$.

Démonstration. — Quel que soit le degré de parité de l'équation donnée, l'équation aux carrés des racines aura toutes ses racines positives; elle sera complète, et elle n'aura que des variations de signes. Supposons que l'on ait formé un tableau contenant l'expression analytique de toutes ces conditions. On peut toujours s'arranger

de manière que toutes les inégalités qui forment ce tableau soient de la forme $M > 0$. Cela fait, si l'on ajoute ces inégalités membre à membre, et si l'on groupe les termes convenablement, on trouve alors la relation qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Si une équation algébrique de degré m est telle que ses coefficients donnent

$$(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2})^2 + (\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3})^2 = \text{ ou } < A_0^2 + A_m^2,$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

Observation. — Si la relation exprimée par le théorème IV est satisfaite par les coefficients d'une équation, il ne s'ensuit pas, nécessairement, que toutes les racines de cette équation soient réelles. C'est ce que montre l'exemple suivant

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0,$$

que nous avons extrait de l'*Arithmétique universelle* de Newton, t. II, p. 12.

Le théorème précédent comporte plusieurs cas particuliers. Nous ne parlerons que de quelques-uns :

Premier cas. — Supposons que l'équation donnée ait toutes ses racines réelles, qu'elle soit réciproque et de degré pair.

1° Si le terme indépendant est positif. On sait que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de même signe.

Dans le cas actuel, le terme du milieu existe nécessairement, afin qu'il n'y ait pas dans l'équation donnée une lacune, commençant et finissant par le même signe, ce qui est un symptôme connu de racines imaginaires.

On trouve aisément que

$$\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2} = 0;$$

par suite, la formule du théorème précédent devient

$$\pm(\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3}) > A_0\sqrt{2},$$

A_0 représentant toujours un nombre positif, on prendra du double signe $\pm$ celui qui rendra le premier membre positif. Cette observation devant se présenter plusieurs fois dans ce qui va suivre, nous prévenons que nous la faisons ici, une fois pour toutes.

Exemple :

$$24x^6 - 242x^5 + 867x^4 - 1334x^3 + 867x^2 - 242x + 24 = 0.$$

2° Si le terme indépendant est négatif. On sait que le terme du milieu doit manquer, et que les coefficients des termes équidistants des termes extrêmes doivent être égaux et de signe contraire. On trouve que

$$\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3} = 0;$$

par suite, la formule du théorème ci-dessus devient

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) > A_0\sqrt{2}.$$

Exemple :

$$6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0.$$

Deuxième cas. — L'équation donnée a toutes ses racines réelles, elle est réciproque et de degré impair.

1° Si les coefficients des termes équidistants des termes extrêmes sont égaux et de même signe. On trouve que

$$\Sigma_{4p} = \Sigma_{4p+1}$$

et

$$\Sigma_{4p+2} = \Sigma_{4p+3};$$

d'où l'on déduit que

$$\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2} = \Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3};$$

par suite, la formule du théorème précédent donne

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) > A_0.$$

Exemple :

$$6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0.$$

2° Si les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de signe contraire. On trouve que

$$\Sigma_{4p} = - \Sigma_{4p+1}$$

et

$$\Sigma_{4p+2} = - \Sigma_{4p+3};$$

d'où

$$\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2} = (\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3});$$

par suite, la formule du théorème précédent donne encore

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) > A_0.$$

Exemple :

$$6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0.$$

Corollaire I. — Si l'équation donnée est réciproque et de degré pair.

1° Si le terme indépendant est positif, et si entre les coefficients de l'équation donnée on a

$$\pm(\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3}) = \text{ ou } < A_0\sqrt{2},$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

2° Si le terme indépendant est négatif, et si les coefficients de l'équation considérée donnent

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) = \text{ ou } < A_0\sqrt{2},$$

l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire II. — Si l'équation donnée est réciproque

et de degré impair, si de plus entre les coefficients on trouve la relation

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) = \text{ou} < A_0,$$

l'équation donnée a nécessairement des racines imaginaires.

Observation. — Si l'on considérait les équations réciproques inverses, on ne trouverait aucun résultat remarquable.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 803

(voir 2e série, t. VI, p. 141);

PAR M. LAISANT,
Capitaine du Génie, à Brest.

Les transformations usitées en Géométrie, comme la similitude, le procédé des rayons vecteurs réciproques, etc., ont pour effet de conserver sans altération certains éléments des figures, tels que les angles, etc. Montrer que les formules suivantes sont *la forme la plus générale* de celles qui sont relatives à la sous-tangente et à la sous-normale en coordonnées rectangulaires ou en coordonnées polaires. Les quatre premières conservent ces longueurs, dans une courbe quelconque, sauf une rapport fixe $\frac{m}{n}$, qui peut devenir l'unité; les quatre suivantes

les changent l'une dans l'autre, sauf encore le rapport fixe $\frac{m}{n}$ (*).

I. *Conserver, sauf un rapport constant* $\frac{m}{n}$:

1° *La sous-tangente en coordonnées rectangulaires*

$$x = mx_1 + A, \quad y = By_1^n;$$

2° *La sous-tangente en coordonnées polaires*

$$\theta = m\theta_1 + A, \quad r = \frac{1}{\frac{n}{r_1} + B};$$

3° *La sous-normale en coordonnées rectangulaires*

$$x = nx_1 + A, \quad y = \sqrt{my_1^2 + B};$$

4° *La sous-normale en coordonnées polaires*

$$\theta = n\theta_1 + A, \quad r = mr_1 + B.$$

II. *Changer, sauf un rapport constant* $\frac{m}{n}$:

1° *La sous-tangente en sous-normale (coordonnées rectangulaires)*

$$x = \frac{m}{2}y_1^2 + A, \quad y = Be_1^{nx};$$

2° *La sous-tangente en sous-normale (coordonnées polaires)*

$$\theta = mr_1 + A, \quad r = \frac{1}{B - n\theta_1};$$

3° *La sous-normale en sous-tangente (coordonnées*

(*) Nous avons corrigé, dans la reproduction de ces formules, quelques incorrections, provenant de l'impression sans aucun doute. Les deux principales consistent dans un changement de signe dans la deuxième formule (II, 2°) et dans la première formule (II, 4°).

rectangulaires)

$$x = n \log y_1 + A, \quad y = \sqrt{2mx_1 + B};$$

4° *La sous-normale en sous-tangente* (*coordonnées polaires*)

$$\theta = A - \frac{n}{r_1}, \quad r = m\theta_1 + B.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Je rappelle les expressions suivantes, bien connues :

Sous-tangente { en coordonnées rectangulaires . $y\dfrac{dx}{dy}$, en coordonnées polaires...... $r^2\dfrac{d\theta}{dr}$;

Sous-normale { en coordonnées rectangulaires . $y\dfrac{dy}{dx}$, en coordonnées polaires...... $\dfrac{dr}{d\theta}$.

Il est clair que la recherche des formules ci-dessus revient à résoudre la question suivante d'une manière générale : exprimer x et y en fonction de x_1 et y_1 (ou r et θ en fonction de r_1 et θ_1) de façon à satisfaire respectivement aux relations suivantes :

I. 1° $y\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dx_1}{dy_1}$, 2° $r^2\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{m}{n} r_1^2 \dfrac{d\theta_1}{dr_1}$,

3° $y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dy_1}{dx_1}$, 4° $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{m}{n} \dfrac{dr_1}{d\theta_1}$;

II. 1° $y\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dy_1}{dx_1}$, 2° $r^2\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{m}{n} \dfrac{dr_1}{d\theta_1}$,

3° $y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{m}{n} y_1 \dfrac{dx_1}{dy_1}$, 4° $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{m}{n} r_1^2 \dfrac{d\theta_1^2}{dr_1^2}$.

Cela fait en réalité huit questions distinctes à résoudre. Avant de les traiter séparément, nous poserons $\frac{m}{n} = \mathrm{K}$ pour tous les calculs, et nous considérerons K comme une constante tout à fait arbitraire. En outre, nous écrivons

$$(1)\quad y = f(x_1 y_1), \qquad (2)\quad x = \varphi(x_1 y_1),$$
$$(3)\quad r = \mathrm{F}(r_1 \theta_1), \qquad (4)\quad \theta = \Phi(r_1 \theta_1),$$

et nous conserverons ces notations jusqu'à la fin aussi. La question sera de trouver dans chaque cas la forme de ces fonctions f, φ, F, Φ.

I.

1°

$$y\frac{dx}{dy} = \mathrm{K}y_1\frac{dx_1}{dy_1}.$$

Or de (1) et (2) je tire

$$dy = f'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + f'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1,$$

et

$$dx = \varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1.$$

Il vient donc

$$\mathrm{K}y_1\frac{dx_1}{dy_1} = f(x_1 y_1)\frac{\varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1}{f'_{x_1}(x_1 y_1)\,dx_1 + f'_{y_1}(x_1 y_1)\,dy_1}$$
$$= \frac{\varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\dfrac{dx_1}{dy_1} + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)}{f'_{x_1}(x_1 y_1)\dfrac{dx_1}{dy_1} + f'_{y_1}(x_1 y_1)} \times f(x_1 y_1),$$

$$\mathrm{K}y_1 f'_{x_1}(x_1 y_1)\frac{dx_1^2}{dy_1^2} + \left[\mathrm{K}y_1 f'_{y_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1)\varphi'_{x_1}(x_1 y_1)\right]\frac{dx_1}{dy_1}$$
$$- f(x_1 y_1)\varphi'_{y_1}(x_1 y_1) = 0.$$

Cette égalité devant être satisfaite quelle que soit la valeur de $\frac{dx_1}{dy_1}$, il en résulte les trois suivantes

$$f'_{x_1}(x_1 y_1) = 0, \quad \varphi'_{y_1}(x_1 y_1) = 0,$$

$$K y_1 f'_{y_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1)\varphi'_{x_1}(x_1 y_1) = 0,$$

dont les deux premières nous montrent que x et y sont de la forme $f(y_1)$ et $\varphi(x_1)$; la troisième devient

$$K y_1 f'(y_1) = f(y_1)\varphi'(x_1), \quad \varphi'(x_1) = \frac{K y_1 f'(y_1)}{f(y_1)}.$$

Sous cette forme on voit qu'il faut égaler les deux membres à une même quantité arbitraire quelconque, car ces deux membres sont deux fonctions de variables différentes; nous aurons ainsi

$$\varphi'(x_1) = m,$$

$$\varphi(x_1) = x = mx_1 + A,$$

$$\frac{K y_1 f'(y_1)}{f(y_1)} = m, \quad \frac{f'(y_1)}{f(y_1)} = \frac{m}{K}\frac{1}{y_1} = \frac{n}{y_1},$$

et, remontant aux fonctions primitives,

$$lf(y_1) = nly_1 + lB, \quad f(y_1) = y = By_1^n.$$

2°

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = K r_1^2 \frac{d\theta_1}{dr_1}.$$

De (3) et (4) je tire

$$dr = F'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1,$$

$$d\theta = \Phi'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1.$$

Il vient

$$K r_1^2 \frac{d\theta_1}{dr_1} = F^2(r_1 \theta_1) \frac{\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) d\theta_1}{F'_{r_1}(r_1 \theta_1) dr_1 + F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) d\theta_1}$$

$$= F^2(r_1 \theta_1) \frac{\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) \dfrac{d\theta_1}{ar_1}}{F'_{r_1}(r_1 \theta_1) + F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) \dfrac{d\theta_1}{dr_1}},$$

$$K r_1^2 F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) \frac{d\theta_1^2}{dr_1^2} + \left[K r_1^2 F'_{r_1}(r_1 \theta_1) - F^2(r_1 \theta_1) \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)\right] \frac{d\theta_1}{dr_1}$$
$$- F^2(r_1 \theta_1) \Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) = 0.$$

Raisonnant d'une façon analogue à celle suivie ci-dessus, il vient :

$$F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad \Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad K r_1^2 F'(r_1) = F^2(r_1) \Phi'(\theta_1),$$

$$\Phi'_{\cdot}(\theta_1) = K r_1^2 \frac{F'(r_1)}{F^2(r_1)},$$

$$\Phi'(\theta_1) = m, \quad \Phi(\theta_1) = \theta = m\theta_1 + A,$$

$$K r_1^2 \frac{F'(r_1)}{F^2(r_1)} = m, \quad r_1^2 \frac{F'(r_1)}{F^2(r_1)} = \frac{m}{K} = n,$$

$$\frac{F'(r_1)}{F^2(r_1)} = \frac{n}{r_1^2}.$$

Remontant aux fonctions primitives, nous aurons

$$\frac{1}{F(r_1)} = \frac{n}{r_1} + B, \quad F(r_1) = r = \frac{1}{\dfrac{n}{r_1} + B}.$$

3°

$$y \frac{dy}{dx} = K y_1 \frac{dy_1}{dx_1},$$

$$K y_1 \frac{dy_1}{dx_1} = f(xy) \frac{f'_{x_1}(x_1 y_1) + f'_{y_1}(x_1 y_1) \dfrac{dy_1}{dx_1}}{\varphi'_{x_1}(x_1 y_1) + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1) \dfrac{dy_1}{dx_1}},$$

$$K y_1 \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\frac{dy_1^2}{dx_1^2} + \left[K y_1 \varphi'_{x_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1) f'_{y_1}(x_1 y_1)\right]\frac{dy_1}{dx_1} - f(xy) f'_{x_1}(x_1 y_1) = 0,$$

$$\varphi'_{y_1}(x_1 y_1) = 0, \quad f'_{x_1}(x_1 y_1) = 0, \quad K y_1 \varphi'(x_1) - f(y_1) f'(y_1) = 0,$$

$$K\varphi'(x_1) = \frac{f(y_1) f'(y_1)}{y_1},$$

$$K\varphi'(x_1) = m, \quad \varphi'(x_1) = \frac{m}{K} = n, \quad \varphi(x_1) = nx_1 + A = x,$$

$$f(y_1) f'(y_1) = m y_1,$$

$$f(y_1)^2 = m y_1^2 + B,$$

$$y = f(y_1) = \sqrt{B + m y_1^2}.$$

4°

$$\frac{dr}{d\theta} = K \frac{dr_1}{d\theta_1}.$$

$$K\frac{dr_1}{d\theta_1} = \frac{F'_{r_1}(r_1 \theta_1)\frac{dr_1}{d\theta_1} + F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)}{\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1)\frac{dr_1}{d\theta_1} + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)},$$

$$K\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1)\frac{dr_1^2}{d\theta_1^2} + \left[K\Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) - F'_{r_1}(r_1 \theta_1)\right]\frac{dr_1}{d\theta_1} - F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) = 0,$$

$$\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad K\Phi'(\theta_1) = F'(r_1),$$

$$K\Phi'(\theta_1) = m, \quad \Phi'(\theta_1) = \frac{m}{K} = n,$$

$$\Phi(\theta_1) = \theta = n\theta_1 + A,$$

$$F'(r_1) = m, \quad F(r_1) = r = m r_1 + B.$$

II.

1°

$$y\frac{dx}{dy} = K y_1 \frac{dy_1}{dx_1}.$$

$$K y_1 \frac{dy_1}{dx_1} = f(x_1 y_1) \frac{\varphi'_{x_1}(x_1 y_1) + \varphi'_{y_1}(x_1 y_1) \frac{dy_1}{dx_1}}{f'_{x_1}(x_1 y_1) + f'_{y_1}(x_1 y_1) \frac{dy_1}{dx_1}},$$

$$K y_1 f'_{y_1}(x_1 y_1) \frac{dy_1^2}{dx_1^2} + \left[K y_1 f'_{x_1}(x_1 y_1) - f(x_1 y_1) \varphi'_{y_1}(x_1 y_1)\right] \frac{dy_1}{dx_1}$$
$$- f(x_1 y_1) \varphi'_{x_1}(x_1 y_1) = 0,$$

$$f'_{y_1}(x_1 y_1) = 0, \quad \varphi'_{x_1}(x_1 y_1) = 0, \quad K y_1 f'(x_1) - f(x_1) \varphi'(y_1) = 0,$$

$$\frac{\varphi'(y_1)}{y_1} = K \frac{f'(x_1)}{f(x_1)},$$

$$\frac{\varphi'(y_1)}{y_1} = m, \quad \varphi'(y_1) = m y_1, \quad \varphi(y_1) = x = \frac{m}{2} y_1^2 + A,$$

$$K \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = m, \quad \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{m}{K} = n, \quad l f(x_1) = n x_1 + l B,$$

$$f(x_1) = y = B e^{n x_1}.$$

2°.

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = K \frac{dr_1}{d\theta_1}.$$

$$K \frac{dr_1}{d\theta_1} = F^2(r_1 \theta_1) \frac{\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) d\theta_1}{F'_{r_1}(r_1 \theta_1) dr_1 + F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) d\theta_1}$$

$$= \frac{F^2(r_1 \theta_1) \left[\Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1) \frac{dr_1}{d\theta_1} + \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)\right]}{F'_{r_1}(r_1 \theta_1) \frac{dr_1}{d\theta_1} + F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1)},$$

$$K F'_{r_1}(r_1 \theta_1) \frac{dr_1^2}{d\theta_1^2} + \left[K F'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) - F^2(r_1 \theta_1) \Phi'_{r_1}(r_1 \theta_1)\right] \frac{dr_1}{d\theta_1}$$
$$- F^2(r_1 \theta_1) \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) = 0,$$

$$F'_{r_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad \Phi'_{\theta_1}(r_1 \theta_1) = 0, \quad K F'(\theta_1) - F^2(\theta_1) \Phi'(r_1) = 0,$$

$$\Phi'(r_1) = K \frac{F'(\theta_1)}{F^2(\theta_1)},$$

$$\Phi'(r_1) = m, \quad \Phi(r_1) = \theta = mr_1 + A,$$

$$K\frac{F'(\theta_1)}{F^2(\theta_1)} = m, \quad \frac{F'(\theta_1)}{F^2(\theta_1)} = \frac{m}{K} = n,$$

$$-\frac{1}{F(\theta_1)} = n\theta_1 - B,$$

$$F(\theta_1) = r = \frac{1}{B - n\theta_1}.$$

3°

$$y\frac{dy}{dx} = Ky_1\frac{dx_1}{dy_1}.$$

$$Ky_1\frac{dx_1}{dy_1} = f(x_1y_1)\frac{f'_{x_1}(x_1y_1)dx_1 + f'_{y_1}(x_1y_1)dy_1}{\varphi'_{x_1}(x_1y_1)dx_1 + \varphi'_{y_1}(x_1y_1)dy_1}$$

$$= \frac{f(x_1y_1)\left[f'_{x_1}(x_1y_1)\frac{dx_1}{dy_1} + f'_{y_1}(x_1y_1)\right]}{\varphi'_{x_1}(x_1y_1)\frac{dx_1}{dy_1} + \varphi'_{y_1}(x_1y_1)},$$

$$Ky_1\varphi'_{x_1}(x_1y_1)\frac{dx_1^2}{dy_1^2} + \left[Ky_1\varphi'_{y_1}(x_1y_1) - f(x_1y_1)f'_{x_1}(x_1y_1)\right]\frac{dx_1}{dy_1}$$
$$- f(x_1y_1)f'_{y_1}(x_1y_1) = 0,$$

$$\varphi'_{x_1}(x_1y_1) = 0, \quad f'_{y_1}(x_1y_1) = 0, \quad Ky_1\varphi'(y_1) = f(x_1)f'(x_1),$$

$$Ky_1\varphi'(y_1) = m, \ \varphi'(y_1) = \frac{m}{Ky_1} = \frac{n}{y_1}, \ \varphi(y_1) = x = nly_1 + A,$$

$$f(x_1)f'(x_1) = m, \quad f^2(x_1) = 2mx_1 + B,$$

$$f(x_1) = y = \sqrt{2mx_1 + B}.$$

4°

$$\frac{dr}{d\theta} = Kr_1^2\frac{d\theta_1}{dr_1},$$

$$K r_1^2 \frac{d\theta_1}{dr_1} = \frac{F'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1}{\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1)\,dr_1 + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\,d\theta_1}$$

$$= \frac{F'_{r_1}(r_1\theta_1) + F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\dfrac{d\theta_1}{dr_1}}{\Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) + \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\dfrac{d\theta_1}{dr_1}},$$

$$K r_1^2 \Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\frac{d\theta_1^2}{dr_1^2} + \left[K r_1^2 \Phi'_{r_1}(r_1\theta_1) - F'_{\theta_1}(r_1\theta_1)\right]\frac{d\theta_1}{dr_1} - F'_{r_1}(r_1\theta_1) = 0,$$

$$\Phi'_{\theta_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad F'_{r_1}(r_1\theta_1) = 0, \quad K r_1^2 \Phi'(r_1) - F'(\theta_1) = 0,$$

$$K r_1^2 \Phi'(r_1) = m, \quad \Phi'(r_1) = \frac{m}{K r_1^2} = \frac{n}{r_1^2}, \quad \Phi(r_1) = \theta = A - \frac{n}{r_1},$$

$$F'(\theta_1) = m, \quad F(\theta_1) = r = m\theta_1 + B.$$

On voit que nous avons retrouvé toutes les formules énoncées dans la question.

Remarques.

1. Si nous changeons x en y, r en θ, et inversement, dans les diverses expressions rappelées plus haut, nous trouverons les suivantes

$$x\frac{dy}{dx}, \quad \theta^2\frac{dr}{d\theta}, \quad x\frac{dx}{dy}, \quad \frac{d\theta}{dr}.$$

La première et la troisième de ces expressions représentent ce qu'on peut appeler la sous-tangente et la sous-normale *relatives à l'axe des y* en coordonnées rectangulaires. La quatrième n'est autre que l'inverse de la sous-normale en coordonnées polaires. Voyons ce que représente la deuxième. Soit OZ l'axe polaire, MT, MN la tangente et la normale à une courbe au point M, OB une perpendiculaire à OZ à l'origine, MA, NB des arcs

de cercle de centre O et terminés à OZ et OB. Nous aurons

$$AM = r\theta, \quad BN = \frac{dr}{d\theta}\theta, \quad OM = r,$$

donc

$$\frac{AM.BN}{OM} = \theta^2 \frac{dr}{d\theta}.$$

Ainsi l'expression $\theta^2 \frac{dr}{d\theta}$ est une quatrième proportionnelle à OM, AM et BN. Nous appellerons P cette longueur, pour abréger.

Le simple changement indiqué résout donc les questions de transformations qui suivent :

I. Conserver, sauf un rapport constant :

1° La sous-tangente relative à l'axe des y en coordonnées rectangulaires ;

2° La longueur P en coordonnées polaires ;

3° La sous-normale relative à l'axe des y en coordonnées rectangulaires.

II. Changer, sauf un rapport constant :

1° La sous-tangente en sous-normale (relatives à l'axe des y), en coordonnées rectangulaires ;

2° La ligne P en l'inverse de la sous-normale (coordonnées polaires) ;

3° La sous-normale en sous-tangente (relatives à l'axe des y), en coordonnées rectangulaires ;

4° L'inverse de la sous-normale en la ligne P (coordonnées polaires).

Les formules I (4°) ne donnent lieu à rien de nouveau puisqu'elles conservent la sous-normale et par conséquent l'inverse de cette ligne.

2. Si dans les mêmes expressions

$$y\frac{dx}{dy},\quad r^2\frac{d\theta}{dr},\quad y\frac{dy}{dx}\quad \text{et}\quad \frac{dr}{d\theta},$$

nous changeons y en r, x en θ, et inversement, nous avons

$$r\frac{d\theta}{dr},\quad y^2\frac{dx}{dy},\quad r\frac{dr}{d\theta}\quad \text{et}\quad \frac{dy}{dx},$$

qui représentent :

La première, la tangente trigonométrique tangν de l'angle que forme la tangente avec le rayon vecteur (coordonnées polaires) ;

La deuxième, le produit L^2 de l'ordonnée par la sous-tangente (coordonnées rectangulaires) ;

La troisième, le produit Π^2 du rayon vecteur par la sous-normale (coordonnées polaires) ;

La quatrième, le coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires).

Ainsi se trouvent résolues les nouvelles questions suivantes :

I. Conserver, sauf un rapport constant :

1° Tangν en coordonnées polaires ;

2° Le produit L^2 (coordonnées rectangulaires) ;

3° Le produit Π^2 (coordonnées polaires) ;

4° Le coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires).

II. Changer, sauf un rapport constant :

1° Tangν en Π^2 (coordonnées polaires) ;

2° L^2 en coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires) ;

3° Π^2 en tangν (coordonnées polaires) ;

4° Le coefficient angulaire de la tangente en Π^2 (coordonnées rectangulaires).

3. Si, toujours dans les mêmes expressions et dans les formules résultantes, nous changeons au contraire y en θ, x en r, et inversement, nous obtenons

$$\theta\frac{dr}{d\theta},\quad x^2\frac{dy}{dx},\quad \theta\frac{d\theta}{dr},\quad \frac{dx}{dy},$$

expressions qui représentent :

La première, l'arc BN (*voir* plus haut) en coordonnées polaires;

La deuxième, le produit L'^2 de l'abscisse par la soustangente relative à l'axe des y, en coordonnées rectangulaires;

La troisième, l'inverse d'une troisième proportionnelle à l'arc BN et à la sous-normale ON, en coordonnées polaires : soit $\frac{1}{Q}$ cet inverse;

La quatrième, l'inverse du coefficient angulaire de la tangente, en coordonnées rectangulaires.

D'où résulte la solution des questions qui suivent :

I. Conserver, sauf un rapport constant :

1° L'arc BN (coordonnées polaires);

2° Le produit L'^2 (coordonnées rectangulaires);

3° La ligne Q (coordonnées polaires).

II. Changer, sauf un rapport constant :

1° L'arc BN en l'inverse de la ligne Q (coordonnées polaires);

2° Le produit L'^2 en l'inverse du coefficient angulaire de la tangente (coordonnées rectangulaires);

3° La ligne Q en l'inverse de l'arc BN (coordonnées polaires);

4° Le coefficient angulaire de la tangente en l'inverse du produit L'^2 (coordonnées rectangulaires).

Note. — Ont résolu la même question MM. Brun et Rachou; Lucien Bignon, à Lima (Pérou); Neuberg, professeur à Bruges.

Questions 822 *et* 823

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 336);

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

822. *Un trièdre trirectangle est circonscrit à une surface du second degré. Démontrer que les normales à cette surface aux points de contact des faces du trièdre et le diamètre qui passe par le sommet de ce trièdre appartiennent à un même hyperboloïde.* (MANNHEIM.)

On peut généraliser ce théorème et l'énoncer ainsi : Dans un trièdre (SABC) circonscrit à une surface du second degré, les parallèles ($\gamma\gamma_1$, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$) menées par chaque point de contact d'une face (γ, α, β) à l'arête opposée, et le diamètre (SO) qui passe par le sommet du trièdre appartiennent à un même hyperboloïde.

Projetons les quatre droites sur l'une des faces (ASB) par des droites parallèles à l'arête opposée (SC). Le point β se projette sur la droite SA, le point α sur l'arête SB et les droites ($\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$) suivant des parallèles ($\alpha'\alpha'_1$, $\beta'\beta'_1$) aux droites SA, SB. La droite SO passant par le centre de la conique intersection de la surface par le plan $\gamma\beta\alpha$, sa projection SO' est un diamètre de la projection de cette conique; cette dernière étant tangente en $\beta'\alpha'$ aux droites SA, SB, la droite SO' passe par le milieu de $\beta'\alpha'$ et par suite par le point de rencontre R des droites $\alpha'\alpha'_1$, $\beta'\beta'_1$.

La droite menée par ce point (R) parallèlement à SC rencontre donc trois des droites considérées et est parallèle à la quatrième.

Par les mêmes constructions sur les autres faces, on obtient deux autres droites qui s'appuient chacune sur trois des droites données et sont parallèles à la qua-

trième ; ces quatre droites sont donc sur un même hyperboloïde. C. Q. F. D.

823. *Deux surfaces gauches ayant une génératrice commune sont telles, que leurs deux plans tangents communs se coupent à angle droit. Démontrer que, pour la génératrice commune, le plan central de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première.*

(MANNHEIM.)

Je prends la génératrice commune pour axe des Z ; on peut prendre pour axe des Y et des X, deux droites perpendiculaires entre elles et à l'axe des Z, telles que l'équation d'un plan tangent à l'une des surfaces en un point situé sur l'axe des Z, à une distance z de l'origine, ait pour équation

$$(1) \qquad Y = \frac{z}{g} X.$$

$Y = 0$ est alors l'équation du plan central de cette surface.

En prenant pour axe des Y' et des X', les deux droites analogues à Y et X par rapport à la seconde surface, l'équation du plan tangent à celle-ci en un point situé sur l'axe des Z à une distance z' de la nouvelle origine, est

$$Y' = \frac{z'}{g'} X'.$$

Le plan $Y' = 0$ est le plan central de cette seconde surface.

Soient :

$$X' = X \cos\alpha + Y \sin\alpha,$$
$$Y' = Y \cos\alpha - X \sin\alpha,$$
$$z' = z - a$$

les équations de transformation.

L'équation du plan tangent à la seconde surface, en un point situé sur l'axe des Z, à une distance z de la première origine, est, dans le premier système d'axes de coordonnées,

$$\mathrm{Y}\cos\alpha - \mathrm{X}\sin\alpha = \frac{z-a}{g'}(\mathrm{Y}\sin\alpha + \mathrm{X}\cos\alpha),$$

$$(2) \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{X}\left(\frac{g'\sin\alpha + (z-a)\cos\alpha}{g'\cos\alpha - (z-a)\sin\alpha}\right).$$

Pour les plans tangents communs, les équations (1) et (2) étant identiques, on a

$$\frac{z}{g} = \frac{g'\sin\alpha + (z-a)\cos\alpha}{g'\cos\alpha - (z-a)\sin\alpha},$$

ce qui donne, pour déterminer z, l'équation

$$z^2 - z[a + (g'-g)\cot\alpha] - ga\cot\alpha + gg' = 0.$$

Soient z_1 et z_2 les racines de cette équation : la condition pour que les plans correspondants soient perpendiculaires est que le produit $z_1 z_2$ soit egal à $-g^2$, puisque ces plans ont pour équation

$$\mathrm{Y} = \frac{z_1}{g}\mathrm{X}, \quad \mathrm{Y} = \frac{z_2}{g}\mathrm{X},$$

ce qui donne

$$(3) \qquad g + g' = a\cot\alpha.$$

Le plan central $\mathrm{Y} = 0$ de la première surface touche la seconde au point déterminé par l'équation

$$g'\sin\alpha + (z-a)\cos\alpha = 0.$$

Le plan central $\mathrm{Y} = \mathrm{X}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ de la seconde surface touche la première au point déterminé par l'équation

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{z}{g}.$$

Pour que ces deux points coïncident, il faut que l'on ait

$$g' \sin\alpha + (g \operatorname{tg}\alpha - a)\cos\alpha = 0,$$

d'où

$$(4) \qquad g' + g = a \operatorname{cotg}\alpha.$$

Les relations identiques (3) et (4) démontrent le théorème et sa réciproque.

Question 850

(voir 2e série, t. VII, p. 187);

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

Considérons la suite des fonctions de Sturm

$$V,\ V_1,\ V_2, \ldots,\ V_n;$$

si une des équations $V_r = 0$ *a* p *racines imaginaires, la proposée a au moins* p *racines imaginaires.*

(DARBOUX.)

Soient Δ, Δ_r le nombre des variations perdues respectivement par les suites

$$V,\ V_1,\ V_2, \ldots,\ V_n,$$
$$V_r,\ V_{r+1}, \ldots,\ V_n,$$

dans le passage de $x = -\infty$ à $x = \infty$. On a

$$\Delta_r + r \geqq \Delta.$$

Δ est le nombre des racines réelles de $V = 0$; Δ_r est au plus égal au nombre μ des racines réelles de $V_r = 0$, car la seconde des suites précédentes ne peut perdre une variation que lorsque V_r s'annule. L'inégalité précédente peut donc s'écrire

$$\mu + r \geqq \Delta.$$

On en tire

$$m - \Delta \geqq m - r - \mu,$$

m étant le degré de V. Mais $m - \Delta$ est égal au nombre $2I$ des racines imaginaires de $V = 0$; donc

$$2I \geqq m - r - \mu.$$

D'ailleurs le degré de V_r étant au plus égal à $m - r$, on a

$$m - r - \mu \geqq p,$$

donc

$$2I \geqq p.$$

C. Q. F. D.

QUESTIONS.

888. Démontrer, sans admettre aucun *postulatum*, que l'angle du quadrilatère ayant pour sommets les milieux des distances du centre d'un quadrilatère régulier à ses quatre côtés excède les neuf dixièmes d'un angle droit. (LIONNET.)

889. Démontrer que le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$x + y + z = N$$

sous les conditions

$$x \leqq y + z,$$
$$y \leqq z + x,$$
$$z \leqq x + y,$$

est

$$\frac{N^2 - 1}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{(N+2)(N+4)}{8}$$

suivant que N est pair ou impair. (CH. HERMITE.)

890. En désignant par X_n le polynôme de Legendre, on propose de démontrer que l'équation de degré $2n$, savoir

$$n(n+1)X_n^2 - (1-x^2)X_n'^2 = 0,$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. (CH. HERMITE.)

891. On considère un hyperboloïde à deux nappes et un point de l'hyperbole focale de cette surface; on construit les différents cônes ayant pour sommet ce point et pour bases les sections circulaires de l'hyperboloïde : trouver le lieu formé par les focales de ces cônes.

(LAGUERRE.)

892. Une sphère variable coupe le plan d'une conique suivant un cercle fixe; la développable circonscrite à cette sphère et à la conique a trois lignes doubles, outre la conique fixe. Chacune de ces lignes doubles, qui est une conique, décrit, lorsque la sphère varie, une surface du second degré ayant pour focale la conique donnée (*).

(LAGUERRE.)

893. Si l'on coupe un tore, ou plus généralement une cyclide, par une série de sphères ayant pour centre un point fixe donné, toutes les courbes d'intersection ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône du deuxième degré. (LAGUERRE.)

(*) M. Chasles a démontré que les trois coniques doubles dont il s'agit sont sur trois surfaces homofocales. B.

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE

(voir 2e série, t. VI, p. 481);

PAR M. E. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

Pendule conique (suite).

Prenons pour origine le point de suspension;

Pour axe des x, une horizontale dirigée de l'ouest à l'est;

Pour axe des y, la trace horizontale du plan méridien dirigée du sud au nord;

Enfin, pour axe des z, une verticale dirigée en sens contraire de la pesanteur.

En tenant compte de la force centrifuge composée et représentant par R la résistance du fil, nous aurons les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} - 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - \frac{\mathrm{R}x}{l},$$

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \frac{\mathrm{R}y}{l},$$

$$(3)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\cos\lambda\frac{dx}{dt} - g - \frac{\mathrm{R}z}{l}.$$

Multipliant ces équations respectivement par dx, dy, dz et ajoutant en remarquant qu'on a

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \quad \text{à cause de} \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

il vient

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = -g\,dz;$$

intégrant et représentant par V la vitesse initiale, par z_1

la valeur initiale de z, on a

$$(a) \qquad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2g(z_1 - z) + V^2.$$

C'est l'équation des forces vives.

Multipliant l'équation (1) par y et l'équation (2) par x, puis retranchant la première de la seconde, on a

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 2\omega\cos\lambda\, y\,\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\lambda\,\frac{(x\,dx + y\,dy)}{dt},$$

ou, à cause de $x\,dx + y\,dy = -z\,dz$,

$$(b) \qquad \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 2\omega(\cos\lambda . y + \sin\lambda . z)\frac{dz}{dt}.$$

Soit s la surface engendrée par le rayon ρ tournant autour du point o, nous aurons

$$2\,ds = x\,dy - y\,dx, \quad \text{d'où} \quad 2\,d^2s = y\,d^2x - x\,d^2y,$$

par suite,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \omega(\cos\lambda . y + \sin\lambda . z)\frac{dz}{dt}.$$

Nous avons représenté par θ l'angle d'écart, c'est-à-dire l'angle que le pendule fait avec le prolongement de l'axe des z.

Appelons ψ l'angle que la trace horizontale du plan d'oscillation fait avec l'axe des x, cet angle étant compté comme positif en tournant de droite à gauche. Posons

$$\frac{d\theta}{dt} = -\beta, \quad \frac{d\psi}{dt} = \gamma,$$

nous aurons

$$\rho = l\sin\theta, \quad z = -l\cos\theta, \quad z_1 = -l\cos\alpha,$$
$$x = l\sin\theta\cos\psi, \quad y = l\sin\theta\sin\psi,$$

$$\frac{dz}{dt} = -l\sin\theta.\beta,$$

$$\frac{dy}{dt} = -l\cos\theta\sin\psi.\beta + l\cos\psi\sin\theta.\gamma,$$

$$\frac{dx}{dt} = -l\cos\theta\cos\psi.\beta - l\sin\theta\sin\psi.\gamma,$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = l^2\beta^2 + l^2\sin^2\theta.\gamma^2,$$

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 2\,\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{l^2d(\sin^2\theta.\gamma)}{dt}:$$

mettant ces valeurs dans les équations (a) et (b), représentant par α, β_1 et c les valeurs initiales de θ, β et γ, il vient

$$(\mathrm{A})\quad \beta^2 + \sin^2\theta.\gamma^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) + \beta_1^2 + \sin^2\alpha.c^2,$$

$$(\mathrm{B})\quad \frac{d(\sin^2\theta.\gamma)}{dt} = (\sin\lambda\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta\sin\psi)\,2\omega\sin\theta.\beta.$$

Ces deux équations doivent servir à la discussion du problème.

Dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre, nous avons $\omega = 0$. L'équation (B) se réduit à

$$d(\sin^2\theta.\gamma) = 0, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\theta.\gamma = \sin^2\alpha.c,$$

$$ds = \frac{l^2\sin^2\alpha.c}{2}dt, \quad s = \frac{l^2\sin^2\alpha.c\,t}{2};$$

ce qui fait voir que la surface engendrée par le rayon ρ varie proportionnellement au temps.

Dans l'équation (A) remplaçons γ par sa valeur, il vient

$$(\mathrm{A}_1)\quad \beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) + \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\theta - \sin^2\alpha).$$

Différentiant cette équation, on a

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{c^2\sin^4\alpha\cos\theta}{\sin^3\theta}.$$

Si à l'origine pour $\theta = \alpha$ on pose $\frac{d\beta}{dt} = 0$, on en tire

$$c = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}};$$

la valeur de β étant nulle à l'origine, reste toujours nulle, l'angle d'écart reste constant; par conséquent, le pendule décrit un cône droit avec la vitesse angulaire constante c, et la courbe engendrée par la projection du pendule sur le plan horizontal est une circonférence.

Lorsque c est moindre que cette valeur, l'angle θ reste toujours moindre que l'angle initial α; en effet, la valeur de β peut se mettre sous la forme

$$\beta = \sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)\left(\frac{2g}{l} - \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}\right)(\cos\theta + \cos\alpha)};$$

toute valeur de θ plus grande que α rendrait cette expression imaginaire.

L'équation (A_1) peut s'écrire

$$\beta^2 = \frac{2g}{l}\left(\sqrt{1-\sin^2\theta} - \sqrt{1-\sin^2\alpha}\right) - \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

L'angle α et, par suite, l'angle θ étant très-petits, nous pouvons développer les radicaux et nous borner aux deux premiers termes, il vient

$$\beta = -\frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}}{\sin\theta}\sqrt{\frac{g}{l}\sin^2\theta - c^2\sin^2\alpha}.$$

Nous avons déjà

$$\gamma = \frac{d\psi}{dt} = \frac{c\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Divisant membre à membre pour éliminer dt, on a

$$d\psi = \frac{c \sin^2\alpha \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta} \sqrt{\frac{g}{l}\sin^2\theta - c^2\sin^2\alpha}}.$$

Concevons un système mobile tournant autour de la verticale oz, avec une vitesse variable représentée par γ_2. Appelons γ_1 la vitesse angulaire relative avec laquelle le plan d'oscillation tourne par rapport à ce système mobile, nous aurons

$$\gamma_1 = \gamma - \gamma_2;$$

posons $\gamma_2 = \gamma\,(1 - \cos\theta)$, nous aurons $\gamma_1 = \gamma\cos\theta$.

En représentant par ψ_1 l'angle compris entre le plan d'oscillation et le plan mobile animé de la vitesse angulaire γ_2, nous aurons

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \gamma_1 = \gamma\cos\theta = \frac{c\sin^2\alpha\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

d'où

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{c\sin^2\alpha\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}\sqrt{\frac{g}{l}\sin^2\theta - c^2\sin^2\alpha}}.$$

Cette expression peut s'intégrer. En déterminant la constante par la condition qu'on ait $\psi_1 = 0$ pour $\theta = \alpha$, on en tire l'équation

$$\left(\sin^2\psi_1 + \frac{c^2 l}{g}\cos^2\psi_1\right)\sin^2\theta = \sin^2\alpha . c^2\,\frac{l}{g}.$$

Représentons par x_1 et y_1 les coordonnées de la courbe décrite par la projection du pendule sur le plan horizontal tournant autour du point avec la vitesse angulaire γ_2, nous aurons

$$x_1 = l\sin\theta\cos\psi_1 \quad \text{et} \quad y_1 = l\sin\theta\sin\psi_1,$$

d'où

$$y_1^2 + c^2 \frac{l}{g} x_1^2 = l^2 \sin^2\alpha \,.\, c^2 \frac{l}{g}.$$

C'est l'équation d'une ellipse dont le demi-grand axe

$$a_1 = l \sin\alpha,$$

et dont le demi-petit axe

$$b_1 = l \sin\alpha \,.\, c \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On voit donc que la projection horizontale du pendule décrit une ellipse, tandis que cette ellipse elle-même tourne autour de son centre avec la vitesse angulaire

$$\gamma_2 = \gamma(1 - \cos\theta).$$

L'angle θ restant toujours très-petit, le facteur $(1 - \cos\theta)$ reste aussi très-petit; il s'ensuit que pendant une oscillation, ou pendant un petit nombre d'oscillations, on peut faire abstraction du déplacement de l'ellipse.

En tenant compte du mouvement de la terre, l'équation (B) peut se mettre sous cette forme :

$$d(\sin^2\theta \,.\, \gamma) = -(\sin\lambda \cos\theta - \cos\lambda \sin\psi \sin\theta)\, 2\omega \sin\theta \, d\theta;$$

nous ne pouvons pas intégrer le dernier terme, parce que nous ne connaissons pas l'expression de $\sin\psi$ en fonction de θ.

Mais si nous supposons $\cos\lambda$ moindre que $\sin\lambda$, si à l'origine, pour $\theta = \alpha$, nous faisons $\sin\psi = 0$, c'est-à-dire si nous prenons l'écart initial perpendiculaire au plan méridien, l'intégrale de ce dernier terme sera négligeable.

En effet, la valeur absolue de $\sin\psi$ augmente pendant le mouvement et peut devenir égale à $+1$ ou à -1; mais $\sin\theta$ diminue à mesure que $\sin\psi$ augmente; de sorte

que le produit $\sin\psi \sin\theta$ reste toujours très-petit relativement à $\cos\theta$; en outre, si les deux facteurs $\sin\psi$ et $d\theta$ sont de même signe pendant la première moitié de l'oscillation, ce qui a lieu quand l'écart est du côté de l'est, ils sont nécessairement de signes contraires pendant la seconde moitié, et réciproquement; par conséquent, la valeur absolue de l'intégrale commence par croître jusqu'à une certaine limite qui s'écarte à peine de zéro, puis décroît ensuite à très-peu près de la même quantité.

Nous en concluons que, pour une latitude moyenne telle que celle de Paris, ou pour une latitude plus élevée, et en prenant l'écart initial perpendiculaire au plan méridien, nous aurons une solution très-approchée en faisant le dernier terme nul. L'équation (B) se réduit à

$$d(\sin^2\theta . \gamma) = -2\omega \sin\lambda \sin\theta \cos\theta \, d\theta.$$

En intégrant et faisant $\gamma = 0$ pour $\theta = \alpha$, c'est-à-dire en supposant le pendule abandonné à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée sans aucune vitesse initiale relative, il vient

$$\gamma = \omega \sin\lambda \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} - \omega \sin\lambda.$$

Mettant cette valeur de γ dans l'équation (A), et remarquant qu'à l'origine on a $\beta_1 = 0$ et $c = 0$, elle devient

$$\beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$$
$$+ \omega^2 \sin^2\lambda \left[(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) \right];$$

les deux termes

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta)$$

sont nuls en même temps pour $\theta = \alpha$, puis ils vont en

croissant à mesure que $\sin\theta$ diminue; mais ils croissent très-inégalement, car le premier a pour limite $\sin^2\alpha$, quantité excessivement petite, tandis que le second a pour limite l'infini. Il en résulte que, sans altérer sensiblement la valeur de β, on peut négliger le premier terme en présence du second, l'équation se réduit à

$$(A_1)\quad \beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) - \omega^2 \sin^2\lambda \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

Si nous imaginons un système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire $-\omega\sin\lambda$, c'est-à-dire avec une vitesse égale et contraire à la composante de la vitesse angulaire de la terre autour de la verticale; si nous représentons par γ_1 la vitesse angulaire relative avec laquelle le plan d'oscillation tourne autour de la verticale par rapport à ce système mobile, nous aurons

$$\gamma_1 = \gamma + \omega\sin\lambda, \quad \text{d'où} \quad \gamma_1 = \omega\sin\lambda\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Cette dernière équation et l'équation (A_1) sont justement celles auxquelles nous sommes parvenus en supposant la terre immobile et donnant au pendule la vitesse angulaire initiale

$$c = +\omega\sin\lambda.$$

Nous en tirons cette conclusion : sous une latitude moyenne ou une latitude élevée, et quand l'écart initial est perpendiculaire au plan méridien, nous pouvons nous représenter très-exactement le mouvement du pendule conique en concevant un système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire $-\omega\sin\lambda$, et supposant que, par rapport à ce système, le mouvement soit le même que si, la terre étant immobile, on imprimait au pendule la vitesse angulaire initiale $+\omega\sin\lambda$.

Quel que soit l'azimut de l'écart initial, cette solution

est d'autant plus approchée que la latitude est plus élevée. Au pôle elle est rigoureusement exacte comme on peut s'en convaincre *à priori*. Il semble d'après cela qu'en faisant $\sin\lambda = 1$, $\cos\lambda = 0$ dans les équations (A) et (B) on devrait en déduire immédiatement l'équation (A_1) sans qu'il soit nécessaire de négliger aucun terme. Afin de ne laisser subsister aucun nuage sur cette question, nous allons résoudre le problème directement en nous supposant placés au pôle.

Nous commencerons par rappeler une observation que nous avons faite précédemment : les équations différentielles sont établies dans l'hypothèse d'une assez grande distance à l'axe de la terre, pour que les variations de la perpendiculaire abaissée du pendule sur cet axe soient complétement négligeables. Cette hypothèse ne peut être admise quand le point de suspension est situé sur l'axe même ; dans ce cas, la valeur de g dépend uniquement de la force d'attraction et ne contient pas la composante de la force centrifuge résultant de la rotation de la terre ; il faut donc tenir compte de cette force centrifuge ; alors, les équations différentielles rigoureuses sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\frac{dy}{dt} - \frac{Rx}{l} + x\omega^2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\frac{dx}{dt} - \frac{Ry}{l} + y\omega^2,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{Rz}{l}.$$

En représentant par x_1, y_1, z_1 les valeurs initiales des coordonnées, et supposant le pendule abandonné à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée sans aucune vitesse initiale relative, on a

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2g(z_1 - z) + \omega^2(x^2 + y^2 - x_1^2 - y_1^2),$$

l'équation (A) devient

$$\beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) - \sin^2\theta . \gamma^2 - \omega^2(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

Remplaçant γ par sa valeur

$$\gamma = \omega\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta),$$

on obtient immédiatement l'équation

$$(\mathrm{A}_1) \quad \beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) - \omega^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

Sous l'équateur, il faut faire $\sin\lambda = 0$, $\cos\lambda = 1$; les équations différentielles deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dz}{dt} - \frac{\mathrm{R}x}{l},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mathrm{R}y}{l},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} - g - \frac{\mathrm{R}z}{l}.$$

L'équation (B) se réduit à

$$d(\sin^2\theta . \gamma) = 2\omega\sin\psi\sin^2\theta d\theta.$$

La force centrifuge composée est toujours parallèle au plan de l'équateur, perpendiculaire à la composante de la vitesse parallèle à ce plan et dirigée de gauche à droite pour un observateur placé suivant l'axe des y et regardant dans le sens de la vitesse composante perpendiculaire à cet axe. Il est facile d'en conclure que quand le pendule se meut dans le plan de l'équateur, la force centrifuge composée est dirigée suivant le fil de suspension, et tend à augmenter la tension de ce fil quand le mouvement a lieu

de l'est à l'ouest, et à la diminuer quand le mouvement a lieu de l'ouest à l'est.

Dans tous les cas, que le pendule se meuve ou non dans le plan de l'équateur, la vitesse verticale $\frac{dz}{dt}$ est négative quand il descend, et positive quand il remonte; par conséquent, la composante de la force centrifuge suivant l'axe des x, $-2\omega\frac{dz}{dt}$, est positive et le pousse vers l'est dans le premier cas; dans le second cas, elle est négative et le pousse vers l'ouest.

Nous ne pouvons pas intégrer le produit

$$\sin\psi \sin^2\theta\, d\theta,$$

parce que nous ne connaissons pas l'expression de $\sin\psi$ en fonction de θ. Par suite, nous ne pouvons pas discuter le problème d'une manière générale. Nous nous bornerons à étudier les cas particuliers correspondant aux positions extrêmes de l'écart initial.

Cet écart étant dirigé dans le plan méridien du côté du sud, nous avons à l'origine $\sin\psi = -1$. L'angle θ allant en diminuant, la différentielle $d\theta$ est négative; donc le produit $\sin\psi \sin^2\theta\, d\theta$ est positif. La vitesse angulaire γ va en croissant positivement. Le plan d'oscillation tourne de droite à gauche.

L'angle θ diminue depuis α jusqu'à une certaine limite inférieure. Pendant le même temps l'angle ψ varie d'environ 90 degrés; de sorte que $\sin\psi = 0$ correspond à très-peu près à la limite inférieure de θ. Il en résulte que l'intégrale prise depuis $\theta = \alpha$ jusqu'à la limite inférieure de θ est positive. La valeur absolue de cette intégrale est évidemment moindre que

$$\int_0^{\alpha} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}.$$

L'angle θ va en croissant depuis la limite inférieure jusqu'à une certaine limite supérieure α' toujours moindre que α. La différentielle $d\theta$ devient positive ; mais l'angle ψ continuant à croître, $\sin\psi$ devient positif, les deux facteurs $d\theta$ et $\sin\psi$ changent de signes à très-peu près en même temps ; donc leur produit reste encore positif pendant la seconde moitié de l'oscillation. L'intégrale prise depuis la limite inférieure jusqu'à la limite supérieure est encore positive et moindre que la valeur indiquée plus haut.

La somme de ces deux intégrales forme l'intégrale totale prise entre les deux limites de l'oscillation ; donc cette intégrale est positive et moindre que

$$\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2}.$$

Nous en conclurons que la valeur de $\sin^2\theta.\gamma$ reste positive pendant toute la première oscillation. A la fin de cette oscillation, pour $\beta = 0$, la vitesse angulaire γ n'est pas nulle, mais conserve une valeur positive.

Il s'ensuit :

1° Que la seconde oscillation ne peut pas être indépendante de la première ;

2° Que le pendule ne s'élève pas à une hauteur égale à celle d'où il est parti ; car l'équation (A) fait voir que tant que l'on n'a pas $\gamma = 0$ pour $\beta = 0$, on ne peut pas avoir $\theta = \alpha$.

De ce que le pendule ne s'élève pas tout à fait à la hauteur d'où il est descendu, il ne faut pas conclure que la durée de la seconde moitié de l'oscillation soit moindre que celle de la première. D'après l'équation (A), pour une même valeur de l'angle d'écart θ, la vitesse angulaire γ diminue quand le terme $\sin^2\theta.\gamma^2$ augmente ; or, pour la même valeur de θ, la vitesse angulaire γ est plus

grande pendant la seconde moitié que pendant la première. Par conséquent, si d'une part le pendule décrit un peu moins de chemin, de l'autre il va un peu moins vite. Ces deux causes influent en sens contraires sur la durée de la demi-oscillation. L'effet produit par chacune d'elles séparément est assez petit pour être négligé; donc à plus forte raison l'ensemble de ces deux effets contraires doit être complétement négligé, et nous pouvons admettre que les deux demi-oscillations ont la même durée.

Il nous reste à faire voir que, pendant l'oscillation totale, l'angle ψ varie d'un peu plus que deux angles droits; c'est-à-dire que le pendule, après s'être écarté vers l'est pendant la première partie de l'oscillation, revient vers l'ouest pendant la seconde partie et dépasse le plan méridien avant d'atteindre le point le plus élevé.

Prenons l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dz}{dt} - \frac{Rx}{l}.$$

Quand le pendule descend, les deux composantes qui agissent suivant l'axe des x sont de signes contraires; la première, qui est positive et pousse vers l'est, commence par l'emporter sur la seconde; mais la seconde finit par l'emporter sur la première.

Quand le pendule remonte, tant que la valeur de x est positive, c'est-à-dire tant que l'écart est du côté de l'est, les deux composantes sont négatives et poussent vers l'ouest. En outre, la valeur de R est plus grande pendant que le pendule marche de l'est à l'ouest que pendant qu'il marche de l'ouest à l'est. Il est facile d'en conclure que le chemin parcouru vers l'est pendant la première partie de l'oscillation est moindre que le chemin parcouru vers l'ouest pendant la seconde partie.

Pendant la seconde oscillation, les deux facteurs $\sin\psi$ et $d\theta$ sont de signes contraires; par conséquent, le couple dont le moment est $2\omega \sin\psi \sin^2\theta\, d\theta$ tend à imprimer au plan d'oscillation un mouvement de rotation de gauche à droite et détruit en partie la vitesse angulaire positive acquise pendant la première oscillation. Le pendule passe très-près de la verticale et s'écarte vers l'est à la fin de l'oscillation. La courbe décrite par la projection horizontale présente une très-légère convexité vers l'ouest.

En supposant l'écart initial dirigé dans le plan méridien du côté du nord, la discussion est exactement la même, et le mouvement est parfaitement symétrique par rapport au plan de l'équateur.

Sous une latitude et pour un azîmut quelconques, il faudrait discuter l'équation générale

$$d(\sin^2\theta.\gamma) = -2\omega \sin\lambda \cos\theta \sin\theta\, \gamma.\theta + 2\omega \cos\lambda \sin\psi \sin^2\theta\, d\theta.$$

Représentons par χ l'intégrale du produit $\sin\psi \sin^2\theta\, d\theta$. Cette intégrale doit être prise avec le signe + ou le signe —, suivant la valeur initiale de $\sin\psi$. Nous aurons

$$\gamma = \frac{\omega \sin\lambda}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) \pm \frac{2\omega \cos\lambda}{\sin^2\theta}\chi.$$

Nous savons que la valeur absolue de l'intégrale χ prise entre deux limites d'une oscillation est moindre que

$$\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2};$$

tant que $\sin\psi$ conserve le même signe, la valeur absolue de l'intégrale χ va en croissant avec l'angle θ. Quand cette intégrale a le signe —, il doit arriver un instant où γ devient nul avant la fin de l'oscillation; car si l'on avait $\beta = 0$ en même temps que $\gamma = 0$, on aurait forcément $\theta = \alpha$.

L'angle θ continue donc à croître, la valeur absolue de l'intégrale χ continue à croître aussi, tandis que la différence $\sin^2\alpha - \sin^2\theta$ continue à décroître jusqu'à la fin de l'oscillation, sans cependant devenir complétement nulle. Il s'ensuit qu'à la fin de l'oscillation la vitesse angulaire γ doit être négative; par suite, la courbe décrite par la projection horizontale du pendule doit former une boucle comme nous l'avons indiqué.

En appelant γ_1 la vitesse angulaire relative du plan d'oscillation par rapport au système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire constante $-\omega\sin\lambda$, on a

$$\gamma_1 = \frac{\omega \sin\lambda \sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \pm \frac{2\omega\cos\lambda}{\sin^2\theta}\chi.$$

Quand la valeur de χ est nulle, le plan d'oscillation décrit deux angles droits par rapport au système mobile pendant une oscillation; par suite, la rétrogradation des points culminants s'effectue avec la vitesse angulaire $-\omega\sin\lambda$.

Quand l'intégrale χ doit être prise avec le signe $+$, le plan d'oscillation décrit un peu plus de deux angles droits par rapport au système mobile pendant une oscillation; par conséquent la rétrogradation est un peu diminuée.

Si, au contraire, χ doit être prise avec le signe $-$, le plan d'oscillation décrit un peu moins de deux angles droits, et la rétrogradation se trouve un peu augmentée.

Nous voyons donc que la vitesse angulaire avec laquelle s'effectue la rétrogradation des points culminants n'est pas la même dans tous les azimuts. Comme la différence est très-faible, elle ne peut être constatée qu'au moyen d'observations très-précises faites sur un assez grand nombre d'oscillations. Cette différence a été signalée par M. le Général Dufour (séance de l'Académie du

7 juillet 1851) et par M. Morren (séance du 21 juillet).

Suivant que l'écart initial est dirigé dans le plan méridien, vers le sud ou vers le nord, l'intégrale χ doit être prise avec le signe + ou avec le signe —. Dans le premier cas, la vitesse angulaire avec laquelle s'effectue la rétrogradation des points culminants est un peu diminuée; dans le second cas, elle est un peu augmentée.

SUR LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES AXES PRINCIPAUX DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. Paul SERRET.

Extrait d'un ouvrage inédit (*).

I. *Étant donnés trois points* A, B, C *et le centre* O *d'une conique,* les *directions des axes principaux* de la courbe se peuvent déterminer *à priori* de la manière suivante.

Prenant les points milieux A′, B′, C′ des côtés du triangle ABC, et le point de concours H′ des hauteurs du triangle résultant A′B′C′, on mène la droite OH′, et l'on détermine le point de concours F des *symétriques* de cette droite par rapport à deux quelconques des côtés du triangle A′B′C′. Les bissectrices de l'angle

$$\widehat{OH', OF}$$

fournissent les directions cherchées.

II. De même, *étant donnés le centre* O *d'une conique*

(*) *Géométrie de Direction* (sous presse); Gauthier-Villars, éditeur.

et l'un de ses triangles conjugués ABC, si l'on détermine le point de concours H des hauteurs de ce triangle, et que, menant la droite OH, on construise le point de concours F des symétriques de cette droite par rapport à deux quelconques des côtés du triangle ABC : les *axes principaux* de la courbe seront dirigés suivant les bissectrices de l'angle

$$\widehat{OH, OF}.$$

Observation. — Les rayons menés, du point O, aux sommets du triangle, et les parallèles à ses côtés, issues du même point, font trois couples de diamètres conjugués de la courbe, ou trois couples de rayons conjugués d'un faisceau en involution. Deux de ces couples suffisent d'ailleurs pour définir ce faisceau dont les rayons conjugués, perpendiculaires entre eux, fourniront ensuite les axes que l'on cherche : et telle est la solution normale du problème. Celle que l'on vient de donner, assez irrégulière au point de vue de la démonstration, offre pourtant un exemple de ce que devraient être la plupart des constructions, et ce qu'elles sont si rarement; c'est-à-dire dégagées de tout superflu et capables de tirer, des seules données de la figure, toutes les lignes nécessaires à la détermination de l'inconnue. Le principe que nous y avons employé se retrouvera d'ailleurs dans le problème suivant, qui est un peu moins facile, et dont on ne connaît encore qu'un très-petit nombre de solutions.

III. Problème. — *Construire les directions des axes principaux d'un ellipsoïde défini par trois diamètres conjugués oa, ob, oc.*

1. Soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de la surface rapportée aux diamètres donnés; et

$$(1')\quad \begin{cases} m(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z)^2 + n(\beta x + \beta' y + \beta'' z)^2 \\ \qquad\qquad + p(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)^2 = 1 \\ \text{ou} \qquad m\mathrm{A}^2 + n\mathrm{B}^2 + p\mathrm{C}^2 = 1 \end{cases}$$

l'équation de la même surface rapportée à trois plans diamétraux conjugués quelconques

$$\mathrm{ABC} = 0.$$

Quels que soient ces derniers, comme le terme indépendant des variables est le même dans les deux équations (1), (1'), leurs premiers membres doivent être identiques. On a donc identiquement

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \equiv m\mathrm{A}^2 + n\mathrm{B}^2 + p\mathrm{C}^2,$$

et les équations

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$(2')\qquad m\mathrm{A}^2 + n\mathrm{B}^2 + p\mathrm{C}^2 = 0$$

représentent une seule et même surface : un cône *fixe*, réel ou imaginaire ; asymptote à la surface proposée, si celle-ci est un hyperboloïde, et dont la trace sur un plan déterminé quelconque est une *conique fixe*

$$(3)\qquad m\mathrm{A}'^2 + n\mathrm{B}'^2 + p\mathrm{C}'^2 = 0,$$

conjuguée à chacun des triangles A'B'C' qui résultent de la section, par le plan que l'on aura choisi, de trois plans diamétraux conjugués de la surface primitive.

Or, si l'on considère, en particulier, la trace du cône (2) ou (2') sur l'un des plans tangents

$$z = c$$

de la surface, la conique résultante est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0,$$

ou

(3') $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Si d'ailleurs on coupe la surface proposée (1) par le plan diamétral parallèle

$$z = 0,$$

la section résultante est

(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les courbes (3') et (4) forment donc l'un de ces systèmes de *deux coniques* que l'on nomme *conjuguées*, parce que, transportées dans un même plan et autour du même centre, les diamètres réels de l'une servent de mesure aux diamètres imaginaires de même direction dans l'autre. Et l'on peut énoncer ce théorème :

Les traces, sur un même plan tangent d'une surface du second ordre, *de trois diamètres conjugués quelconques de la surface sont les sommets d'autant de* triangles conjugués *à une même conique ayant pour centre le point de contact du plan tangent considéré*, *égale en outre et homothétique à la* conique conjuguée *de la section déterminée dans la surface par le plan diamétral parallèle*.

2. La proposition réciproque est également vraie : les diamètres menés du centre de l'ellipsoïde aux sommets de l'un quelconque des triangles conjugués à la courbe précédente font toujours trois diamètres conjugués de la surface.

3. En particulier, *les traces* de trois diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, ou d'un hyperboloïde à deux nappes, *sur le plan tangent mené par l'un des ombilics, sont les sommets d'autant de triangles* conjugués à un même cercle *et dont les trois hauteurs se croisent en cet ombilic*.

On sait que les questions relatives aux figures à trois dimensions se peuvent traiter de deux manières différentes : soit dans l'espace même où ces figures sont tracées; soit, dans le plan, par une réduction préalable de la question en une autre où n'interviennent plus que deux des trois dimensions de l'étendue. Le théorème que l'on vient d'établir réalise cette réduction du problème *solide* en un problème *plan*, pour la plupart des questions relatives aux diamètres conjugués des surfaces du second ordre.

4. Revenons à notre problème; et soient oa, ob, oc ou a, b, c les trois diamètres conjugués, réels ou imaginaires, qui définissent la surface. Dans le plan tangent de cette dernière pour le point c, et autour de ce point comme centre, imaginons la courbe C

$$(C) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

égale et homothétique à la conique conjugée de la section diamétrale parallèle. Et soient A′, B′, C′ les traces, sur le même plan, des axes principaux de la surface.

D'après le théorème précédent, le *triangle principal* A′B′C′ est conjugué à la courbe C. Et il résulte, de l'orthogonalité des axes OA′, OB′, OC′, que le point de concours des hauteurs de ce triangle coïncide avec le pied H de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en c; le carré de cette perpendiculaire OH mesurant, au signe près, la *puissance* du point H *par rap-*

port au triangle A'B'C',

$$\overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{Ha'} = -\overline{OH}^2.$$

On pourrait s'arrêter là, et le problème que l'on s'était proposé serait implicitement résolu. On sait effectivement que le centre du cercle conjugué à un triangle A'B'C' est au point de rencontre H des hauteurs de ce triangle, le carré du rayon de ce cercle étant mesuré par la puissance de ce point par rapport au triangle :

$$r^2 = \overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{Ha'}.$$

On connaît donc ici le centre H et le rayon

$$r = \sqrt{\overline{HA'}.\overline{Ha'}} = \sqrt{-\overline{OH}^2} = OH\sqrt{-1}$$

du cercle conjugué au triangle principal A'B'C'; et celui-ci n'est autre que le *triangle conjugué* commun *à la conique* C *et à un cercle imaginaire* donné de centre et de rayon.

5. Mais la solution effective du problème suppose la détermination effective de ce triangle. Pour y parvenir, nous remarquerons d'abord que le produit

$$HA'.Ha' = -\overline{OH}^2$$

mesure aussi la demi-puissance du point H par rapport au cercle circonscrit au triangle A'B'C',

$$\frac{1}{2}\overline{HA'}.\overline{Ha''} = -\overline{OH}^2 (*).$$

(*) L'une quelconque des hauteurs $\overline{A'H'a'}$ d'un triangle étant prolongée jusqu'au cercle circonscrit suivant $\overline{a'a''}$, on a

$$\overline{Ha'} = \overline{a'a''},\quad \overline{Ha'} = \frac{1}{2}\overline{Ha''};$$

$$HA'.Ha' = \frac{1}{2}HA'.Ha''.$$



On connaît donc, en premier lieu, le *point de concours* H *des hauteurs du triangle principal* A′B′C′, et la *puissance*

$$\text{(I)} \qquad \overline{\mathrm{HA}'}.\overline{\mathrm{H}a''} = -2\overline{\mathrm{OH}}^2$$

de ce point par rapport au cercle circonscrit à ce triangle.

6. Observant ensuite que la position, dans un plan déterminé, d'un triangle quelconque, dépend de six paramètres; de trois seulement, si ce triangle doit être conjugué à une conique C; d'un seul paramètre, enfin, si ses trois hauteurs doivent, en outre, concourir en un point donné H : on verra qu'il existe, dans le plan tangent actuel, une série déterminée comprenant une infinité de triangles, conjugués à la courbe C, comme le triangle principal; assujettis, comme celui-là, à avoir, dans le point H, le point de concours de leurs hauteurs; inscrits dès lors et circonscrits, en même temps que ce triangle, à deux courbes déterminées. De là ce problème incident:

Trouver la commune trajectoire des sommets, et la commune enveloppe des côtés d'un triangle A′B′C′ *dont les trois hauteurs se croisent en un point donné* H, *et qui demeure conjugué à une conique fixe* C.

La première de ces courbes se détermine bien aisément. Et comme la droite menée du point H (α, β) à l'un quelconque des sommets (x, y) du triangle mobile doit être perpendiculaire au côté opposé, ou à la polaire même $\left(\frac{x\mathrm{X}}{a^2} + \frac{y\mathrm{Y}}{b^2} = -1\right)$ de ce sommet par rapport à la courbe C, on a, dans la condition résultante

$$\frac{-b^2x}{a^2y}\,\frac{y-\beta}{x-\alpha} = -1 \text{ (*)},$$

(*) On suppose ici, et l'on supposera jusqu'à la fin, les diamètres a, b perpendiculaires entre eux, ce qui revient au fond à substituer, à l'aide

l'équation même de la courbe parcourue par chacun des sommets du triangle mobile : une hyperbole équilatère

$$\text{(II)} \qquad (a^2 - b^2)xy - a^2\alpha y + b^2\beta x = 0$$

passant par le point donné H, par le centre c de la conique C, ayant ses asymptotes parallèles aux axes principaux de cette dernière ; identique, en un mot, comme on le devait prévoir, à l'hyperbole qui contient les pieds des normales menées, du point H, à cette conique.

Comme tous les triangles de la série actuelle, *le triangle principal* A'B'C' *sera donc inscrit à l'hyperbole* (II). Mais on peut ajouter que le *cercle circonscrit à ce triangle rencontrera cette hyperbole suivant un quatrième point* que l'on peut construire, et qui n'est autre que le *point* H', diamétralement opposé au point H *dans l'hyperbole ;* propriété commune d'ailleurs aux cercles analogues pour tous les triangles de la série.

Il résulte, en effet, d'un théorème connu, que le *cercle des neuf points* d'un triangle quelconque A'B'C', inscrit à une hyperbole équilatère, contient le centre ω de la courbe. Et comme trois de ces neuf points sont les points milieux a, b, c des segments HA', HB', HC', on voit, en doublant les rayons vecteurs menés de l'origine H aux quatre points a, b, c et ω de ce cercle, que les quatre points A', B', C' et H' résultant de cette duplication seront encore sur un même cercle : circonscrit au triangle A'B'C' et passant par le point H', diamétralement opposé au point H par rapport au centre ω de l'hyperbole. Comme le point H (*), le point H' appartient donc à l'hyperbole (II).

---

d'une construction connue, aux diamètres conjugués $2a$, $2b$ de la section diamétrale $z = 0$, les axes mêmes de cette section.

(*) C'est une propriété connue du triangle inscrit à une hyperbole équilatère que le point de concours des hauteurs appartient à la courbe.

La même conclusion résulterait aussi du calcul.

On trouve, effectivement, que le point de concours des hauteurs et les sommets 1, 2, 3 d'un triangle inscrit à l'hyperbole équilatère

$$(h) \qquad xy = 1,$$

ont leurs abscisses liées par la relation

$$(k) \qquad x_1 x_2 x_3 x_H = -1.$$

Formant ensuite l'équation *aux abscisses de rencontre* de l'hyperbole (h) et du cercle (1, 2, 3)

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

on trouve

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2Ax + 2\frac{B}{x} + C = 0$$

ou

$$x^4 + 2Ax^3 + Cx^2 + 2Bx + 1 = 0;$$

et l'on en déduit

$$(k') \qquad x_1 x_2 x_3 x_4 = +1.$$

Or les relations (k), (k') entraînent l'égalité

$$x_4 = -x_H$$

ou la conclusion que le quatrième point de rencontre d'une hyperbole équilatère et d'un cercle circonscrits à un même triangle, est le point diamétralement opposé, dans l'hyperbole, au point de concours des hauteurs de ce triangle.

7. Passons maintenant à la commune enveloppe des côtés des triangles (A'B'C', H).

Tous ces triangles étant inscrits à l'hyperbole (H) et conjugués à la conique C, la courbe, enveloppe de leurs côtés, ou des polaires de leurs sommets par rapport à cette

conique, n'est autre que la *polaire réciproque* de l'hyperbole par rapport à la directrice C : une conique aussi, comme cela résulte d'un théorème bien connu ; et, dans le cas actuel, une *parabole* P dont les éléments principaux peuvent être réunis indépendamment de tout calcul.

Comme l'hyperbole (II) passe, en effet, par le centre c de la conique directrice C; la polaire du centre c, par rapport à la directrice, ou la *droite à l'infini*, est tangente à la polaire réciproque que l'on cherche : et celle-ci est une parabole P.

Comme l'hyperbole (II) possède, en outre, un point à l'infini sur chacun des axes cx, cy de la directrice C; sa polaire réciproque, par rapport à cette dernière, est tangente à chacun des axes cy, cx dont le point de concours c appartient dès lors à la directrice de la parabole P.

Enfin, le point donné H, où se croisent les hauteurs d'une infinité de triangles A'B'C' circonscrits à cette parabole, est un second point de sa directrice $(\overline{c\text{H}})$; et la polaire hh' du point H, par rapport à la conique C, en est une seconde tangente.

On connaît donc la directrice cH et deux tangentes distinctes cx, hh' de la parabole enveloppe dont le foyer F se trouve dès lors au point de rencontre de deux droites que l'on sait construire (symétriques de la directrice par rapport à ces tangentes).

Or, tous les triangles (A'B'C', H) étant circonscrits à la parabole P, les cercles circonscrits à tous ces triangles passent d'eux-mêmes, comme l'on sait, et *le cercle circonscrit au triangle principal* A'B'C' *passe* également *par le foyer* F de cette parabole.

8. En résumé, l'on connaît deux points F, H' du cercle circonscrit au triangle principal A'B'C' (n°s 6 et 7), ainsi que la puissance du point H par rapport à ce cercle

(n° 5), formule (I); on peut donc en obtenir un troisième point situé sur l'une des droites HH' ou HF.

Construisant ensuite le cercle déterminé par ces trois points et construisant de même l'hyperbole (II), ces deux courbes se coupent en quatre points : le premier, H', qu'on laissera de côté, parce qu'il est indépendant de la situation du centre O de la surface sur la perpendiculaire menée du point H au plan tangent où se fait la construction; les trois autres, A', B', C', qui répondent seuls au problème et déterminent les traces, sur ce plan, des axes principaux de la surface.

Le problème proposé se trouve donc résolu, et sa construction ramenée à celle des trois derniers points de rencontre d'une hyperbole équilatère et d'un cercle auxquels leur définition même assigne un premier point commun (H').

9. On aurait pu négliger la notion relative au point H' et construire le cercle circonscrit au triangle A'B'C' d'après ces seules conditions : qu'il passe par le point F; que sa puissance par rapport au point H soit égale à un carré donné $(-2\overline{OH}^2)$, et sa puissance par rapport au centre c de la courbe C, à $-(a^2+b^2)$ (théorème Faure). Obtenue d'après cette dernière condition, la seconde trace de ce cercle sur la droite cF reproduirait justement le point H' que l'on voulait négliger.

10. L'analyse précédente se peut résumer dans cette construction :

Les trois diamètres conjugués qui définissent la surface étant oa, ob, oc; dans le plan tangent mené par l'extrémité c de l'un de ces diamètres, et autour de ce point comme centre, on *imagine* la courbe C égale et homothétique à la conique conjuguée de la section diamétrale parallèle, et l'on *construit effectivement* :

1° L'hyperbole équilatère, lieu géométrique des pieds des normales menées à la courbe C par le pied H de la perpendiculaire abaissée, du centre O de la surface, sur le plan tangent considéré; et, dans cette hyperbole, le point H' diamétralement opposé au point H;

2° Le foyer F de la parabole polaire réciproque de l'hyperbole précédente par rapport à la courbe C.

Menant ensuite par les points F et H' un cercle dont la puissance par rapport au point H soit égale à $-2\overline{OH}^2$; les traces, sur le plan tangent considéré, des axes principaux de la surface se trouveront aux trois derniers points de rencontre de ce cercle et de l'hyperbole précédente.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES QUI ONT DES RACINES IMAGINAIRES;

D'après M. LILL,
Capitaine du Génie autrichien.

Dans un précédent article (*), les *Nouvelles Annales* ont fait connaître un procédé graphique, aussi nouveau qu'élégant, dû à M. Lill, pour trouver les *racines réelles* d'une équation algébrique à coefficients réels. Rappelons brièvement en quoi il consiste.

Après avoir représenté conventionnellement l'équation donnée par un contour polygonal rectangulaire 0 1 2 3 4 5 (**) (*voir* la figure, p. 366), il suffit

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VI, p. 359; *voir* aussi les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 854.

(**) On suppose ici et dans la figure que l'équation donnée est du quatrième degré; mais la méthode est générale. Quant à la manière de for-



de former d'autres contours rectangulaires, tels que o$a_1 b_1 c_1$ 5, ayant les mêmes extrémités o et 5 que le contour primitif, s'appuyant par leurs sommets a_1, b_1, c_1 sur les côtés 1 2, 2 3, 3 4 de celui-ci, et par conséquent découpant dans son intérieur une série de triangles semblables successifs o1a_1, $a_1$2b_1, $b_1$3c_1, $c_1$45. Dans chacun de ces *contours dérivés*, le rapport $\frac{1a_1}{o1}$ ou la tangente trigonométrique de l'angle 1oa_1, est une racine réelle de l'équation.

M. Lill ajoute aujourd'hui (*) qu'une méthode analogue s'applique à la détermination des *racines imaginaires*. Il s'agit encore de former des contours rectilignes, tels que o$a'b'c'$5, ayant mêmes extrémités initiale et finale que le contour primitif, et donnant lieu aussi à des triangles successifs o1a', a'2b', b'3c', c'4 5, tous semblables entre eux. Mais ces triangles et ces contours dérivés ne sont plus rectangulaires, et leurs sommets intermédiaires a', b', c' sont situés hors des côtés 1 2, 2 5, 3 4 du contour primitif, au lieu de tomber sur ces côtés mêmes.

Cela fait, si, du premier sommet a', on abaisse sur le côté 1 2 une perpendiculaire $a'\alpha$, et qu'on la prolonge, dans l'autre sens, d'une quantité égale $\alpha a''$, les rapports des *longueurs complexes*

$$1\alpha + \alpha a'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad 1\alpha - \alpha a''\sqrt{-1}$$

au côté o1, ou ce que M. Lill appelle les *tangentes imaginaires* des angles a'o1, a''o1 sont deux racines imaginaires conjuguées de l'équation. Si l'équation donnée a

---

mer ce polygone, notamment de déterminer la direction mutuelle de ses côtés successifs, *voyez* l'article inséré aux *Comptes rendus*.

(*) La première communication que l'auteur m'a faite de ce supplément remonte à la date du 9 mars dernier. Diverses circonstances en ont, de son aveu, retardé la publication. (E. J.)

des coefficients imaginaires, le contour polygonal, qui la représente, n'est plus rectangulaire. Mais c'est encore en construisant, d'après les mêmes principes, une série de triangles semblables, qu'on parvient à la détermination des racines de l'équation.

Enfin M. Lill fait connaître qu'on peut éviter l'emploi des triangles scalènes, et n'employer, même pour la recherche des racines imaginaires, que des contours rectangulaires, comme pour les racines réelles, avec cette différence que leurs sommets ne s'appuient plus sur les côtés du contour primitif comme lorsqu'il s'agit des racines réelles. Nous ne donnerons pour le moment aucune autre indication sur ce sujet.

Pour bien fixer les idées, soit

$$x^4 - 6x^3 + 14,25\,x^2 - 15,75\,x + 6,5 = 0$$

l'équation proposée (c'est celle à laquelle la figure se rapporte; l'unité choisie pour échelle est le demi-centimètre).

On voit d'abord qu'on peut *inscrire* dans le contour primitif rectangulaire o12345 les deux contours dérivés rectangulaires $o a_1 b_1 c_1 5$ et $o a_2 b_2 c_2 5$. Ainsi l'équation a deux racines réelles, dont les valeurs sont

$$\frac{1 a_1}{o1} = \text{tang}\, 1 o a_1 = 1$$

et

$$\frac{1 a_2}{o1} = \text{tang}\, 1 o a_2 = 2.$$

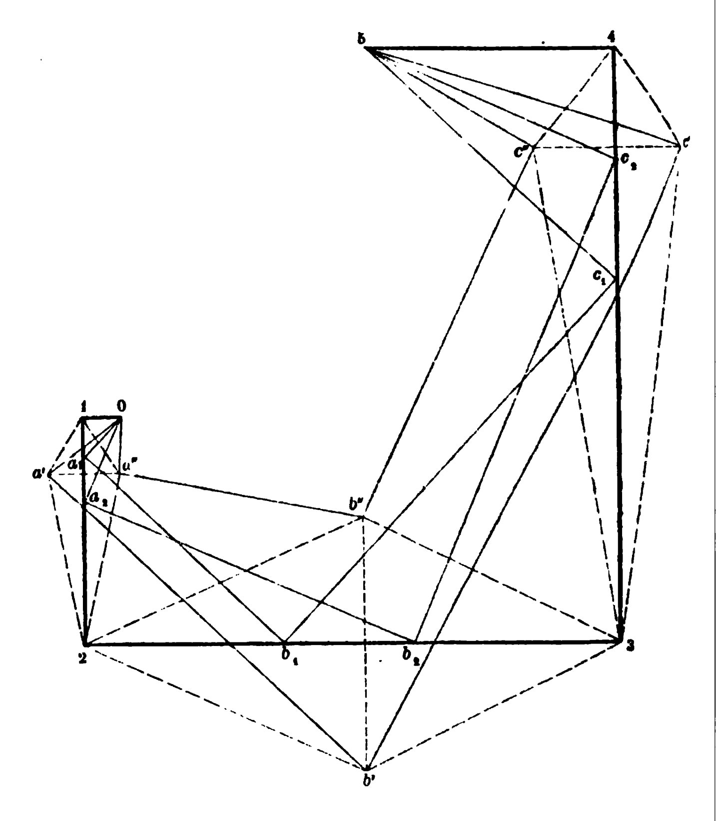
On voit ensuite que les deux contours $o a' b' c' 5$ et $o a'' b'' c'' 5$, qui aboutissent aux points o et 5, donnent lieu, respectivement, à la série de triangles semblables $o1a'$, $a'2b'$, $b'3c'$, $c'45$ et $o1a''$, $a''2b''$, $b''3c''$, $c''45$. On en conclut que les deux racines imaginaires

ont pour valeurs

$$\frac{1\alpha + \alpha a'\sqrt{-1}}{01} = \text{tang imaginaire } a'01 = 1{,}5 + \sqrt{-1}$$

et

$$\frac{1\alpha + \alpha a''\sqrt{-1}}{01} = \text{tang imaginaire } a''01 = 1{,}5 - \sqrt{-1}.$$



Ce procédé, comparé à celui que M. Lill avait fait connaître précédemment, en est, comme on voit, la généralisation, faite conformément aux principes du cal-

cul des *quantités complexes* ou *directives*; calcul bien connu aujourd'hui, grâce notamment aux récentes et savantes publications de MM. Hoüel et Transon (*).

Les lecteurs des *Nouvelles Annales* qui voudront bien se reporter à l'article précité des *Comptes rendus* n'auront pas de peine à trouver la démonstration du remarquable procédé de M. Lill.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 843

(voir 2e série, t. VII, p. 44);

PAR M. A. IMBERT.

GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE. — PROPOSITION A DÉMONTRER.

Si l'on joint les sommets d'un triangle à un point O *intérieur par trois droites, les pieds de ces trois droites déterminent un second triangle inscrit dans le premier, qui comprend en outre trois autres triangles, puis un troisième inscrit de même dans le second, qui comprend en outre trois autres triangles, et ainsi de suite.*

On demande de démontrer que :

1° *Les côtés de tous ces triangles concourent en trois points* P, I, E, *qui sont sur une ligne droite* D; *j'appelle* e, p, i *les points où les droites qui concourent en* O *coupent cette droite* D;

(*) *Voir* la *Théorie élémentaire des quantités complexes* par M. Hoüel, et les tomes VI et VII des *Nouvelles Annales*.

2° *Dans l'intérieur de chacun des triangles énumérés, il existe un point tel, que, si on le joint aux sommets par des droites, ces lignes passent aux points e, p, i;*

3° *Les points ainsi obtenus sont trois à trois sur des lignes droites qui passent par des points* P, I, E;

4° *On peut former ainsi un quinconce géométrique dont les allées donnent vue sur des points remarquables de la ligne* D. *On demande de démontrer encore qu'on peut construire un nouveau quinconce en conservant les mêmes points remarquables (savoir* P, I, E, *et leurs compagnons e, p, i) tout en prenant un nouveau point* O' *pour point de départ de toute la construction.*

(J.-E. Barbier.)

1° Soit A'B'C' un des triangles; celui-ci et le triangle donné ABC ont par construction leurs sommets sur trois droites concourantes; donc, en vertu d'un théorème connu, leurs côtés se rencontrent deux à deux en trois points situés en ligne droite.

2° Dans le triangle AB'C' par exemple, le point cherché se trouve sur A*e* menée déjà. Je joins C'*i*, B'*p*. Tout revient à montrer que ces droites concourent en un même point de A*e*. Or les triangles AB'C', A'B'C', dont les côtés se coupent en trois points en ligne droite, ont, en vertu de la réciproque du théorème déjà cité, leurs sommets sur trois droites concourantes; donc il existe dans chaque triangle un point répondant à la question. J'appelle α, β, γ ces points, dont O lui-même fait partie.

3° Les triangles AB'C', ABC ont leurs sommets sur trois droites concourantes et leurs côtés se coupent en trois points en ligne droite, P', E', I'. Les triangles AB'C', A'B'C' fournissent par la même raison trois points P'', E'', I''. Mais les côtés des triangles ABC, A'B'C' dont les sommets sont sur ces mêmes droites concourantes, se

coupent sur la droite D. Donc, les points P', E', I'; P'', E'', I'' ne sauraient différer des points P, E, I.

4° Les quatre droites issues d'un des points *i*, *e*, *p*, du point *i* par exemple, A*i*, αi, A'*i*, *ei* ou D forment un faisceau anharmonique, qui a un rapport anharmonique et un rayon homologue communs, avec un second faisceau issu d'un des points P, E, I de P, par exemple, et engendré par les mêmes points A, α, A', *e*. Donc (et c'est le théorème sur lequel repose toute la démonstration précédente) les trois autres couples de droites différentes de D se coupent en trois points en ligne droite. Mais de cette droite font partie : *e* par hypothèse, O' par définition même. Donc un point O' donnera un nouveau quinconce dont les allées donneront vue sur les mêmes points remarquables de D que le point O.

C. Q. F. D.

Même question;

PAR M. JOUFFRAY,
Elève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux).

1° Je prends le triangle donnée ABC pour triangle de référence; les équations de ses côtés seront $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Les équations des droites A*a*, B*b*, C*c* qui se coupent en O, sont

(A*a*) $$m\beta - n\gamma = 0,$$

(B*b*) $$n\gamma - l\alpha = 0,$$

(C*c*) $$l\alpha - m\beta = 0;$$

cherchons l'équation d'un côté du triangle intérieur, *bc* par exemple; cette ligne passe par l'intersection des droites AB, C*c* d'une part, A*c*, B*b* de l'autre; son équa-

tion sera donc

$$(bc) \qquad l\alpha - m\beta - n\gamma = 0,$$

de même

$$(ca) \qquad m\beta - n\gamma - l\alpha = 0,$$
$$(ab) \qquad n\gamma - l\alpha - m\beta = 0;$$

et il est aisé de voir que les points P, I, E d'intersection de (bc, α), (ca, β), (ab, γ) sont sur la droite représentée par l'équation

$$(\mathrm{PE}) \qquad l\alpha + m\beta + n\gamma = 0.$$

Je considère le nouveau triangle inscrit dans abc; je le désigne par $a'b'c'$. Je vais démontrer que les droites Bc, bc, $b'c'$ se coupent au même point P. Or, $b'c'$ doit passer par l'intersection des droites Bb, ac d'une part, Cc, ab d'autre part; son équation sera donc

$$(b'c') \qquad 3l\alpha - m\beta - n\gamma = 0,$$

de même

$$(c'a') \qquad 3m\beta - n\gamma - l\alpha = 0,$$
$$(a'b') \qquad 3n\gamma - l\alpha - m\beta = 0.$$

Si j'ajoute à l'équation de bc, celle de BC multipliée par 2, j'obtiens celle de $b'c'$. Donc ces trois droites se coupent en un même point P. Il en sera de même pour les deux groupes ($c'a'$, ca, CA), ($a'b'$, ab, BA). Donc les côtés de tous les triangles formés se coupent en trois points situés sur une même droite D.

2° Soient e, p, i les points où la droite D est rencontrée par les droites Aa, Bb, Cc. Je joins pc et ib; les équations de ces deux droites sont

$$(pc) \qquad 3n\gamma + m\beta - l\alpha = 0,$$
$$(ib) \qquad 3m\beta + n\gamma - l\alpha = 0;$$

retranchant ces deux équations, on trouve

$$2(n\gamma - m\beta) = 0,$$

qui est l'équation de Aa; donc les trois lignes se coupent en un même point.

La propriété subsiste évidemment pour les triangles Bac, Cab, ainsi que pour les triangles intérieurs à abc; car alors abc se trouve relativement à $a'b'c'$ dans les mêmes conditions que ABC par rapport à abc.

3° Soient O, O', O″ les points ainsi obtenus dans les triangles Abc, Bca, Cab; O_1, O'_1, O''_1, les points analogues dans les triangles $ab'c'$, $bc'a'$, $ca'b'$, et ainsi de suite; les trois points O_1, O'_1, O''_1 sont sur une droite passant par E. En effet, la droite EO_1 aura pour équation

$$(EO_1) \qquad 5n\gamma - m\beta - l\alpha = 0,$$

car elle passe par l'intersection de (AB, D) et de (pc, Aa). Le point O'_1 est déterminé par l'intersection de

$$(Bb) \qquad l\alpha - n\gamma = 0$$

et de

$$(CE) \qquad 3n\gamma + l\alpha - m\beta = 0;$$

et l'intersection de ces droites se trouve sur EO_1, car retranchant de l'équation de (Cc) celle de (Bb) multipliée par 2, je retrouve celle de (EO_1). Le point O''_2 est encore sur cette ligne; il se trouve, en effet, sur les lignes

$$(Cc) \qquad l\alpha - m\beta = 0,$$

et

$$(pa') \qquad 3l\alpha - m\beta - 5n\gamma = 0.$$

Or, si de cette dernière équation, je retranche la précé-

dente multipliée par 2, j'obtiens

$$l\alpha + m\beta - 5n\gamma = 0,$$

donc O''_2 se trouve encore sur EO_1.

On voit de même que les points P, O'_1, O''_1, O_2 sont en ligne droite, ainsi que I, O_1, O''_1, O'_2.

4° Prenant un nouveau point O, je puis, en conservant les points P, I, E, *e*, *p*, *i*, former une nouvelle figure analogue. Considérons un point ω sur un plan coupant le plan de la figure suivant la ligne D, et projetons la figure sur ce nouveau plan en prenant pour centre de la projection un point quelconque de la droite ωO : la nouvelle figure formée jouira des propriétés démontrées, et les points de la droite D seront bien les mêmes dans les deux figures.

5° On peut encore, dans la figure, signaler quelques particularités intéressantes; ainsi, j'ai pour les lignes telles que PA, les équations

(PA) $\quad m\beta + n\gamma = 0,$

(IB) $\quad n\gamma + l\alpha = 0,$

(EC) $\quad l\alpha + m\beta = 0;$

retranchant ces équations deux à deux, j'obtiens les équations des droites A*a*, B*b*, C*c*. Donc, les droites PA, IB, EC se coupent deux à deux sur A*a*, B*b*, C*c*.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Janin et Griolet, du lycée de Grenoble (comme M. Imbert); Gabriel Lippmann, du lycée Napoléon; Morges, du lycée Louis-le-Grand; Grégoire, du collége Rollin (par la projection conique d'un triangle équilatéral); Paul Endrès, du lycée de Douai; André Baoul, du lycée Louis-le-Grand; Lourde, du lycée de Pau; Coulomb, du lycée de Nîmes (par les propriétés des transversales et l'homologie).

ACADÉMIE PONTIFICALE DES *NUOVI LINCEI.*

PROGRAMME POUR LE PRIX CARPI.

L'Académie, dans le but de conférer le prix annuel, fondé par la généreuse disposition testamentaire d'un de ses membres ordinaires, feu le chevalier docteur Pierre Carpi, propose de développer le thème suivant.

THÈME.

Comparer entre elles les marées des principaux ports de toutes les côtes italiennes, apprécier et expliquer leurs différences.

ÉCLAIRCISSEMENT.

Galilée s'est occupé du flux et du reflux de la mer (*). Mais de son temps, c'est-à-dire en 1616, on ne connaissait ni les vraies doctrines sur l'attraction universelle, ni l'analyse supérieure; il n'était donc pas possible d'indiquer les principales causes du phénomène signalé. Malgré cela, cet illustre *Linceo* cherchait à reconnaître (**), il y a de cela deux siècles et demi, les raisons probables qui font que le flux et le reflux de la mer sont plus sensibles dans l'Adriatique, et surtout à Venise, que sur les côtes de la Méditerranée. Il en résulte que notre thème a

(*) Un Traité manuscrit sur ce phénomène physico-géographique se trouve à la bibliothèque du Vatican; il contient un frontispice autographe très-intéressant de Galilée.

(**) Le *Opere di Galileo Galilei*, t. I, p. 498, Firenze, 1842; et t. II, p. 400, Firenze, 1843.



été en partie conçu par le glorieux réformateur des doctrines d'Aristote.

L'étude du thème proposé devra être bien développée; on évitera néanmoins tout ce qui n'appartiendrait pas rigoureusement à la question, sans aller jusqu'à supprimer ce qui peut aider à la clarté et à la force des démonstrations. Il sera d'une grande utilité à l'auteur de connaître les travaux auxquels se sont livrés sur les marées les physiciens géographes, par exemple : Humboldt, Whewell, Lubbok, Berghaus, Germar, Thomson, Maury, Dessiou, Chazallon,..., et même les géomètres modernes : Laplace, Delaunay et autres.

L'auteur devra puiser aux sources officielles, ou au moins les plus dignes de foi, les observations sur la contemporanéité des marées, sur leurs différences de temps, et faire connaître où il a recueilli les observations. Il devra aussi indiquer les intervalles qui séparent la haute marée de la culmination lunaire, et aussi sa hauteur maxima, minima, et moyenne ordinaire, extraordinaire, aux syzygies et aux équinoxes, sous l'influence de certains vents et lors des plus grands changements de la pression atmosphérique, etc. On devra exposer en général toutes les circonstances physiques ou géographiques qui modifient la marche ordinaire des marées et en fournir les explications. Il est nécessaire surtout de bien indiquer les causes des différences qui s'observent entre les marées des principaux ports de toutes les côtes de l'Italie. Enfin il est recommandé de développer l'argument aussi au point de vue de l'analyse mathématique, en se guidant principalement sur ce qu'a publié à ce sujet l'illustre Laplace dans sa *Mécanique céleste*. Mais si l'auteur trouve que notre thème, par sa nature même, ne permet pas l'application de l'analyse, il devra exposer clairement les difficultés qui s'y opposent.

Bien que le thème consiste rigoureusement à demander simplement l'étude et l'exposition scientifique des marées dans les principaux ports d'Italie, par la raison qu'ils offrent un plus grand intérêt, néanmoins on recevra avec reconnaissance les observations et les études sur les marées à tout autre point des côtes italiennes pris soit dans les îles, soit sur le continent.

CONDITIONS.

1° Les Mémoires sur le thème proposé devront être rédigés ou en italien, ou en latin, ou en français : nulle autre langue n'est admise.

2° Chaque Mémoire portera sur son frontispice une épigraphe, qui sera répétée à l'extérieur d'une enveloppe cachetée dans laquelle se trouveront le nom et l'adresse de l'auteur.

3° On ouvrira seulement l'enveloppe correspondante au Mémoire qui aura obtenu le prix.

4° Si les auteurs qui auront obtenu une mention honorable désirent que l'Académie publie leurs noms, il faudra qu'ils en fassent la demande dans les quatre mois qui suivront le jour dans lequel le prix aura été décerné ; ce terme expiré, les enveloppes seront brûlées sans être décachetées.

5° L'Académie a décidé que, à l'exception de ses trente membres ordinaires, chacun, quelle que soit sa nationalité, pourra concourir pour ce prix.

6° Chaque Mémoire, avec l'enveloppe cachetée correspondante, devra être envoyé *franco* à l'Académie avant le dernier jour du mois d'octobre 1869, date de la clôture du concours.

7° Le prix sera décerné par l'Académie, dans le mois

de janvier 1870, et consistera en une médaille d'or de la valeur de *mille livres*.

8° Le Mémoire couronné sera publié, entièrement ou par extrait, dans les *Atti* de l'Académie, et l'auteur en recevra cinquante exemplaires.

Rome, 12 juin 1868.

Le président,
B. Viale Prela'.

Le secrétaire,
P. Volpicelli.

BIBLIOGRAPHIE.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

Éléments de Géométrie; par *Eugène Catalan*, ancien élève de l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences, Professeur d'Analyse à l'Université de Liége, Membre associé de l'Académie de Belgique, Membre de la Société Philomathique de Paris et de la Societé des Sciences de Liége, Correspondant de l'Académie des Sciences de Toulouse, de la Société des Sciences de Lille et de la Société d'Agriculture de la Marne. 2[e] édition revue et augmentée; in-8; 1866. Liége, Decq, libraire, rue de la Régence. — Paris, Gauthier-Villars, libraire, quai des Augustins, 55. — Prix: 6 fr. 50 c.

Le compte rendu dont nous allons donner un extrait est d'un savant italien, M. D. Chelini (*). C'est une bonne fortune

(*) Voir *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*. Tomo I, febbraio 1868, p. 54.

pour un livre que de mériter l'entière approbation d'un géomètre aussi distingué.

M. Chelini a fait suivre son Rapport d'une Note dans laquelle « il rappelle qu'il a, en 1837, inséré dans un journal italien (*Giornalo Arcadico*) une *nouvelle théorie des quantités proportionnelles* qui contient tout ce qui a été écrit, avant et après, sur ce sujet. Cette théorie ayant passé inaperçue, M. Chelini croit opportun d'en donner un rapide exposé. » Nous regrettons que le défaut d'espace nous oblige à restreindre le compte rendu de M. Chelini à ce qui concerne particulièrement la seconde édition de la *Géométrie* de M. Catalan.

« L'édition actuelle se distingue de la précédente par de notables perfectionnements et additions. Les propositions de chacun des huit Livres en lesquels l'ouvrage est divisé ont été coordonnées de manière que l'intelligence puisse plus facilement les embrasser et la mémoire les retenir.

» Les démonstrations dans lesquelles l'infini apparaît trop, pour employer les expressions de l'Auteur, ont été changées.

» La détermination d'une valeur approchée du rapport de la circonférence au diamètre a été reprise en entier, et donnée avec tous les développements nécessaires.

» En outre, on trouve dans cette édition plusieurs choses nouvelles, ou du moins mieux traitées que par les devanciers de l'Auteur, sans parler de ceux qui depuis l'ont plus ou moins imité sans le citer.

» Tels sont, par exemple, les articles concernant la mesure des angles; la définition du rapport des quantités incommensurables; le rapport de deux rectangles; le quadrilatère inscrit; les définitions des longueurs des courbes, des surfaces courbes et des volumes terminés par des surfaces courbes. Plusieurs démonstrations concernant l'égalité des angles trièdres, le volume du prisme triangulaire, l'égalité des surfaces des triangles sphériques symétriques, et la mesure de la zone sphérique.

» Dans le Livre VI, se trouve le beau théorème de Cauchy, sur l'égalité des polyèdres convexes, ainsi que diverses conséquences du théorème d'Euler.

» Dans l'Appendice du Livre VII, l'Auteur a donné l'analyse de la dernière partie de son Mémoire sur la théorie des polyèdres, Mémoire original et profond, et d'un grand intérêt.

» Dans l'Appendice du Livre VIII, on démontre que, parmi tous les corps de même superficie, la sphère a le plus grand volume. La démonstration ingénieuse de Steiner a été rendue plus simple et plus lucide dans toutes ses parties.

» D'autres Appendices et paragraphes contiennent les principes des théories importantes de la Géométrie moderne. Une exposition plus ample de ces principes se trouve dans un autre ouvrage de notre Auteur, intitulé *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, ouvrage qui peut être considéré comme un complément de celui-ci.

» Chaque Livre est terminé par les énoncés d'un grand nombre de théorèmes à démontrer et de problèmes à résoudre, choisis avec soin parmi les plus beaux et les plus intéressants qu'offre la science.

» Il est hors de doute que par ses qualités remarquables, l'ouvrage de M. Catalan sera très-favorablement accueilli par les professeurs et les élèves. »

Compléments de géométrie fondés sur la perspective, formant suite à tous les Traités de Géométrie élémentaire, par *M. Poudra*, Officier supérieur d'État-major, en retraite.

Les méthodes en géométrie ont pour but, ou de reculer les bornes de nos connaissances, ou de simplifier l'étude de cette science et aussi d'en faciliter les applications.

Parmi ces dernières méthodes, une des plus intuitives est celle fondée sur la perspective. Toutes les propriétés connues ou démontrées par la géométrie élémentaire, donnent immédiatement, presque à vue, celles de figures plus composées qui sont les perspectives des premières, et, inversement, permettent de ramener toutes constructions sur ces dernières à celles beaucoup plus simples et connues des premières.

M. Poudra, dans un nouvel ouvrage, intitulé *Compléments de Géométrie fondés sur la perspective*, a employé cette méthode, dans le but de simplifier ainsi l'étude de cette science.

L'Auteur commence par donner les moyens de trouver les perspectives de points, de droites, et établit alors les propriétés ou relations qui existent entre les figures; c'est ainsi qu'il donne les belles propriétés de l'involution et l'origine, dans cette théorie, du centre, des points doubles; il donne ensuite la transformation d'un triangle, d'un quadrilatère, etc., et en déduit les propriétés générales de ces diverses figures. Il donne la solution graphique de ce problème : « Mettre en perspective deux quadrilatères quelconques donnés, d'où résulte le moyen de mettre en perspective une figure dont quatre points sont connus en perspective. »

L'Auteur considère une circonférence coupée par une transversale, comme formée de deux circonférences superposées et qui sont perspectives réciproques; la transversale étant la ligne de terre, il en déduit alors diverses propriétés de cette courbe, les pôles, polaires, triangles polaires, points conjugués, etc.; il examine ensuite les diverses courbes qui proviennent de la perspective du cercle, et alors, presque à vue, il en tire les propriétés, soit descriptives, soit métriques, de ces courbes; il fait voir qu'alors tout problème sur les coniques peut se ramener à la solution d'un problème sur un cercle.

Pour résoudre ce problème, il fallait d'abord savoir résoudre celui-ci : « Une conique étant connue simplement par cinq conditions, trouver la circonférence dont la conique cherchée est la perspective. » L'Auteur, dans trente-deux cas divers, fait voir comment on peut avoir cette circonférence, et alors avoir le centre, les axes, les foyers, etc., de la conique cherchée, sans avoir besoin de construire un nouveau point de la courbe.

Dans un dernier Chapitre, l'Auteur examine le problème des coniques déterminées par la condition d'être tangentes à d'autres coniques, le nombre des solutions : problème important, dont M. Chasles a donné la belle et générale solution.

Dans un second Volume, l'Auteur se propose d'appliquer de

même la perspective-relief à la transformation des figures à trois dimensions en d'autres aussi à trois dimensions, de manière à passer des propriétés connues des unes à celles des autres, ainsi par exemple, des propriétés de la sphère à celles des surfaces du deuxième dégré. UN ABONNÉ.

LEÇONS NOUVELLES DE PERSPECTIVE; par *A. Chevillard*, Professeur à l'École impériale des Beaux-Arts. Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 12 francs.

L'*Avertissement* fait suffisamment connaître l'esprit de l'Ouvrage : c'est celui des déductions faciles. Au moyen de quelques notions scientifiques très-élémentaires, de l'ordre qui a été suivi, et d'une exposition concise et claire, l'Auteur est parvenu à écrire un traité complet de *perspective ombrée*, en 228 pages.

Le Chapitre I contient d'utiles considérations sur la définition et les premiers principes de la perspective.

Dans les Chapitres II et III, on trouve l'exposé d'un système de perspective *ombrée* déjà presque suffisant pour des artistes peu familiarisés avec les tracés de projections et les propriétés des sections coniques. La perspective des édifices entièrement donnés en plan et en élévation n'exige, en effet, que de savoir représenter des *horizontales* et des *verticales*. La méthode des *reports* de traces et points de fuite, qui n'est au fond qu'une méthode de tracés *homologiques*, se trouve dégagée de toutes difficultés d'application par l'emploi de la distance réduite et des hauteurs réduites, combiné avec des plans perspectifs et des horizons variés.

Le Chapitre IV traite des *Échelles de perspectives*. L'Auteur n'a pas cru devoir omettre les échelles de Desargues, publiées à *Lyon* en 1625, sous le nom de *Méthode des petits piés*, et depuis modifiées dans un sens bien différent par MM. Adhémar et de la Gournerie; mais, la méthode de Desargues a tou-

jours sa raison d'être pour des praticiens de la perspective rapide.

L'Auteur explique les Échelles de M. Adhémar, comme si le tableau était remplacé par un plan plus éloigné, à savoir : le plan des Échelles de front. Cette explication nous paraît préférable, à cause de sa rapidité, à celle qui semble nécessiter un principe nouveau, dit *principe des hauteurs*.

A partir du Chapitre V, les tracés de perspective *immédiate*, qui constituent réellement la science du dessin perspectif, dominent tout l'enseignement. C'est là que tant d'ouvrages de mérites divers deviennent difficiles à lire, parce qu'ils manquent d'enchaînement géométrique. A ce sujet, l'Auteur a très-développé l'usage de la *réduction homothétique* qui n'est pas une méthode, mais un principe géométrique s'appliquant à diverses méthodes pour les rendre usuelles. On voit, par les exemples traités à partir de la page 77, comment on peut se décider sur le choix de telle ou telle construction immédiate. A la page 81, l'Auteur donne les *ombres d'une cheminée sur un toit*, le point de fuite des rayons lumineux étant inaccessible. Je n'ai vu nulle part cet utile problème résolu avec autant de simplicité.

Le Chapitre VI traite de la perspective *inverse* et des moyens d'étudier géométriquement un tableau ou une gravure, et par suite d'en corriger les parties défectueuses. Le problème de la *restitution visuelle*, qu'il faudrait lire avant de visiter une galerie de tableaux, est extrait en grande partie de l'ouvrage de M. de la Gournerie, cité à l'endroit important (p. 100).

Le commencement du Chapitre VII prépare le lecteur aux questions de *contours apparents* et d'intersections de surfaces ; celles-ci ne viennent, cependant, qu'aux Chapitres VIII, IX, etc. Il eût été bon de dire en quoi la perspective du cercle horizontal est un élément préliminaire important de ces questions, tout le monde n'étant pas architecte.

Le Chapitre VIII est rempli d'exercices bien pratiques, et qui ne présentent aucune difficulté à cause du système de généralisations successives adopté par l'Auteur. On remarquera comment la perspective d'un cercle de plan quelconque (p. 138)

n'est qu'une extension du cas où ce plan est horizontal (p. 106). La méthode des reports développée au Chapitre II, où le géométral est horizontal, comme celle des Échelles de perspective au Chapitre IV, se trouve actuellement vraie pour un plan quelconque. Cette généralisation n'est pas une découverte, sans doute, mais nulle part nous ne l'avons vue présentée dans un ordre aussi précis de déductions utiles. Et nous croyons pouvoir affirmer que la solution du problème général (p. 139) appartient entièrement à M. Chevillard. La question des portes et arcades (p. 142) est traitée d'une manière plus complète et plus facile que dans plusieurs autres ouvrages.

Les Chapitres IX et X terminent la perspective usuelle. On peut remarquer, au Chapitre IX, l'épure de la perspective d'un fronton et la simplification qui en résulte par la note (p. 153), simplication mise en pratique au problème de la page 189. La perspective d'un vase (Chap. X, p. 175) présente des détails intéressants sur les points de *transition* et la transparence.

Dans l'exemple de l'hémicycle, traité au Chapitre X, on trouve exécutée la véritable méthode des ombres, sous la dépendance d'un plan perspectif.

Le Chapitre XI contient une exposition de *perspective générale*, déjà commencée § 1 du Chapitre VIII, et qui constitue une partie nouvelle, due à l'Auteur de ce traité, qui a présenté en perspective la suite des épures principes de la géométrie descriptive. De là résultent des tracés d'une simplicité remarquable: par exemple, celui qui donne la perspective de la plus courte distance entre deux droites figurées; puis, la plus courte distance elle-même. Je ferai observer que, dans les divers modes de représenter les objets, les analogies, les similitudes existent implicitement, lorsqu'elles tiennent à la géométrie pure de ces objets, laquelle est indépendante de leur représentation. La difficulté consiste à faire ressortir ces analogies par le choix ou l'emploi des éléments de traduction, et par une notation graphique appropriée. C'est la difficulté que l'Auteur a très-simplement résolue.

L'Ouvrage se termine par des généralités sur les *tableaux courbes*, lorsqu'ils n'exigent que l'emploi de la perspective li-

néaire. Les généralités sur la perspective des *bas-reliefs* sont dues aux recherches de MM. Chasles, Poudra, de la Gournerie; mais, elles ont été expliquées d'une manière très-simple par M. Chevillard, au moyen de quelques propositions de géométrie élémentaire et du théorème de Desargues démontré par la perspective (p. 21).

Disons encore que l'Atlas de ce traité de perspective contient 32 planches de figures dessinées avec un admirable soin, et gravées sur acier. UN ABONNÉ.

Revue des publications étrangères.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da *B. Boncompagni*. Tomo I. Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, via Lata, n° 211.

Le *Bulletin de Bibliographie et d'Histoire des Sciences mathématiques et physiques* est un recueil périodique dont on publie chaque mois un cahier de trois feuilles au moins et de cinq au plus. Ces cahiers se vendent à Rome, dans l'Imprimerie des Sciences mathématiques et physiques (via Lata, 211), au prix de 35 centimes la feuille. Les personnes qui voudront bien envoyer des écrits destinés à être publiés dans ce recueil, sont priées de les remettre au bureau de la poste dans des plis adressés à M. B. Boncompagni.

Ceux de ces écrits qui seront rédigés en italien, en français ou en latin seront publiés textuellement dans ce Bulletin.

Voici la table des matières des quatre premiers numéros de cet intéressant recueil :

JANVIER. — Sopra Pietro Peregrino di Maricourt, e la sua Epistola *de Magnete*, Memoria prima del *P. D. Timoteo Bertelli Barnabita*.

FÉVRIER. — *Aven Natan*, e le teorie sulla origine della luce

lunare e delle stelle presso gli autori ebrei del medio evo. Nota di M. *Steinschneider.*

Intorno al centro di gravita. Notizie storico-critiche del sig. Dott[r] *Domenico Piani.*

Intorno al alcune definizioni della forza di restituzione dei corpi solidi corrispondenti ai due metòdi analitico e sintetico coi quali e stata studiata la teoria dell'elasticità. Nota del Dott[r] *Domenico Cipoletti.*

De notis numerorum romanis; auctore *G. Friedlein.*

Sur la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation, par Aboul-Wéfa et Tycho-Brahé; Lettre de M. *L.-Am. Sédillot* à *D.-B. Boncompagni.*

Élements de Géométrie, par Eugène Catalan. 2[e] édition revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars, etc., 1866. *P. Domenico Chelini* d. S. P.

Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis Arithmeticæ libri II. Recensuit Ricardus Hoche. Accedunt codicis cizensis problemata Arithmetica. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri, MDCCCLXVI. Prof. *Giuseppe Spezi.*

Supri spettri prismatici delle stelle fisse. Memoria del *P. A. Secchi, etc.* Firenze, stamperia reale, 1867. (Estratto dell'Autore.)

Mars. — Sulla epistola di Pietro Peregrino, e sopra alcuni trovati e teorie magnetiche del secolo XIII. Memoria seconda del *P. D. Timoteo Bertelli Barnabita.*

La première idée du télégraphe magnétique, par *G.-A. Vosterman van Oijen.*

Avril. — Sulla epistola di Pietro Peregrino di Maricourt, e sopra alcuni trovati e teorie magnetiche del secolo XIII. Memoria seconda del *P. D. Timoteo Bertelli Barnabita.* (Continuazione.)

Sur l'Astronomie de Boèce signalée par M. le D[r] Maurice Cantor; par M. *Maximilien Curtze.*

SUR LA DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DE SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

Tandis que deux nombres suffisent pour caractériser un système de courbes planes assujetties au nombre des conditions nécessaires pour les déterminer, moins une, il faut trois nombres pour caractériser un système de surfaces (*). Ces trois nombres sont :

1° Celui des surfaces du système qui passent par un point;

2° Celui des surfaces qui touchent une droite;

3° Celui des surfaces qui touchent un plan.

Ces trois nombres sont nommés les *caractéristiques* du système, et on les désigne respectivement par les lettres μ, ν et ρ.

Nous ne nous occuperons ici que des systèmes de surfaces du second ordre qui satisfont à huit conditions. Nous désignerons, avec le géomètre anglais, une surface du second ordre par le mot *quadrique*.

Pour déterminer les caractéristiques d'un système de quadriques, on peut très-souvent faire usage des équations suivantes, où φ désigne le nombre des cônes dans le système, χ le nombre des coniques, et ψ celui des surfaces composées de deux plans dont la ligne d'intersection est limitée à deux points (*sommets*) :

(1) $$\varphi = 2\rho - \nu,$$

(2) $$\chi = 2\mu - \nu,$$

(3) $$\psi = 2\nu - \mu - \rho.$$

(*) *Voir* les Mémoires de MM. de Jonquières et Chasles (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 567; et t. LXII, p. 405).

Les deux premières de ces équations sont bien connues, la troisième s'établit en même temps que les deux premières, de deux manières analogues.

1. Les coniques qui résultent de l'intersection des quadriques d'un système (μ, ν, ρ), par un même plan, forment un système (μ, ν). Celui-ci contient $2\mu - \nu$ (*) coniques infiniment aplaties qui correspondent aux χ coniques dans le système des quadriques, et $2\nu - \mu$ coniques composées de deux droites. Celles-ci résultent : 1° de l'intersection du plan avec les ρ quadriques qui le touchent; 2° de son intersection avec une des ψ quadriques composées. Donc

$$2\nu - \mu = \rho + \psi.$$

2. Les cônes circonscrits aux quadriques d'un système (μ, ν, ρ), et qui ont leurs sommets à un même point, forment un système (ν, ρ), qui contient $(2\rho - \nu)$ cônes composés de deux plans correspondants aux cônes dans le système de quadriques, et $(2\nu - \rho)$ cônes infiniment aplatis. Ceux-ci sont : 1° les cônes circonscrits aux μ quadriques qui passent par le point; et 2° les cônes circonscrits aux ψ quadriques composées. Par conséquent

$$2\nu - \rho = \mu + \psi.$$

Les nombres φ, χ et ψ sont, comme les nombres $2\mu - \nu$, $2\nu - \mu$ dans la théorie des systèmes de coniques (**) des nombres théoriques qui peuvent indiquer plusieurs fois une même quadrique singulière. Il ne suffit donc pas de compter simplement ces quadriques singulières, on doit prendre le nombre de chaque espèce de cônes, coniques ou quadriques composées, avec un certain coefficient. J'ai

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 195.

(**) *Voir* les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 242.

déterminé (*) les coefficients relatifs aux systèmes de quadriques qui satisfont à des conditions simples et élémentaires (**), d'une manière analogue à celle dont j'ai fait usage pour les coniques (***). Les résultats que j'ai trouvés sont renfermés dans les exposés suivants.

Un cône appartenant à un système simple et élémentaire compte dans le nombre φ pour *deux* si son sommet est sur un plan donné; pour *quatre* lorsqu'il est sur deux plans, et pour *huit* s'il se trouve sur trois plans.

Une conique plane appartenant à un système simple et élémentaire compte dans le nombre χ pour *deux* si son plan passe par un point donné; pour *quatre* s'il passe par deux points, et pour *huit* s'il passe par quatre points.

Une quadrique composée de deux plans dont la droite d'intersection est limitée à deux sommets compte pour *deux* si la droite d'intersection rencontre une droite donnée; pour *quatre* lorsqu'elle rencontre deux droites données; pour *huit* si elle en rencontre trois, et pour *seize* si elle en rencontre quatre (****).

Ces règles donnent lieu aux suivantes, qui sont relatives aux systèmes de quadriques touchant des surfaces données.

Un cône appartenant à l'un de ces systèmes compte, dans le nombre φ, pour *deux*, ou *quatre*, ou *huit*, suivant

(*) *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie danoise des Sciences*, p. 91; 1866.

(**) Les systèmes de la XVIII[e] classe dans le Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 409).

(***) *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. V, p. 242.

(****) Je saisis l'occasion de corriger une erreur qui s'est glissée au lieu cité des *Comptes rendus de l'Academie de Copenhague*. Dans la cinquième série de la première colonne, on doit remplacer

$$2\nu - \mu - \rho = 12y + 18z \quad \text{par} \quad 2\nu - \mu - \rho = 12y + 12y + 18z,$$

ce qui donne

$$y = 1, \quad \text{au lieu de} \quad y = 2.$$

que son sommet est sur une, ou deux, ou trois surfaces données.

Une conique plane appartenant à l'un de ces systèmes compte, dans le nombre χ, pour *deux*, ou *quatre*, ou *huit*, suivant que son plan est tangent à une, ou deux, ou trois surfaces données.

Une quadrique composée appartenant à l'un de ces systèmes compte, dans le nombre ψ, pour *deux*, *quatre*, *huit* ou *seize*, selon que la droite d'intersection des plans composants est tangente à une, deux, trois ou quatre surfaces données.

Une surface donnée peut être remplacée par une courbe; alors, la condition que le plan d'une conique du système touche cette courbe compte comme celle de toucher une surface, et la condition que la droite d'intersection de deux plans, formant une quadrique composée, rencontre la courbe, compte comme celle de toucher une surface.

On pourrait aussi tirer ces règles pour la multiplicité des quadriques singulières des principes établis dans une Note que j'ai insérée dans les *Nouvelles Annales*.

Le nombre des quadriques dans un système (μ, ν, ρ), qui satisfont à une neuvième condition donnée, se détermine ordinairement (*) par une expression de la forme

$$(4) \qquad \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho,$$

où α, β, γ dépendent de la condition donnée, et servent à la caractériser; et lorsque l'on connaît les nombres α, β, γ qui correspondent à neuf conditions, on peut déterminer le nombre des quadriques qui y satisfont, et en particulier les caractéristiques des systèmes de quadriques qui satisfont à huit. Il s'agit donc de déterminer ces nombres pour toute condition simple.

(*) *Voir* le Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 412).

Désignons par Z la condition simple, dont on cherche les nombres correspondants α, β, γ.

A cet effet, on y ajoute sept autres conditions $Z_1, \ldots, Z_7$, dont on connaît les nombres correspondants $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \alpha_7, \beta_7, \gamma_7$. Les caractéristiques de ce système seront, selon (4), des fonctions linéaires de α, β, γ. En les substituant dans les formules (1), (2), (3), et en exprimant par $\varphi(Z_1, \ldots, Z_8), \ldots$ les nombres $\varphi, \chi, \psi \ldots$ qui correspondent au système $(Z_1, \ldots, Z_8)$, on trouve :

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(Z_1, \ldots, Z_7, Z) = A'\alpha + B'\beta + C'\gamma, \\ \chi(Z_1, \ldots, Z_7, Z) = A''\alpha + B''\beta + C''\gamma, \\ \psi(Z_1, \ldots, Z_7, Z) = A'''\alpha + B'''\beta + C'''\gamma, \end{cases}$$

où A', B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''' dépendent seulement des conditions $Z_1, \ldots, Z_7$, ou des nombres α_1, β_1, $\gamma_1, \ldots, \alpha_7$, β_7, γ_7. La manière la plus facile de les déterminer, c'est de remplacer successivement Z par les trois conditions *élémentaires* et simples : de passer par un point p, de toucher une droite l, et de toucher un plan P, ce qui donne respectivement

$$\alpha = 1, \; \beta = \gamma = 0; \quad \beta = 1, \; \alpha = \gamma = 0; \quad \gamma = 1, \; \alpha = \beta = 0.$$

On trouve donc

$$A' = \varphi(Z_1, \ldots, Z_7, p), \quad B' = \varphi(Z_1, \ldots, Z_7, l), \ldots.$$

On peut donc trouver $A', B', \ldots$, *ou*, en exprimant par les formules (1), (2) et (3) les nombres φ, χ et ψ qui correspondent aux systèmes $(Z_1, \ldots, Z_7, p), \ldots$, au moyen des caractéristiques connues de ces systèmes, *ou*, en comptant directement les quadriques singulières qui y sont comprises. Si l'on sait déterminer les trois nombres $\varphi(Z_1, \ldots, Z_7, Z)$, $\chi(Z_1, \ldots, Z_7, Z)$, $\psi(Z_1, \ldots, Z_7, Z)$, les trois équations (5) serviront à déterminer α, β, γ, si ces équations ne dépendent pas les unes des autres.

En prenant pour les conditions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ les différentes conditions élémentaires et simples, on formera un grand nombre d'équations, dont trois indépendantes les unes des autres pourront servir à déterminer α, 6 et γ. Puis, les autres peuvent donner une confirmation aux résultats trouvés. Nous ferons, dans nos exemples, usage des équations suivantes :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(6p,\ P,\ Z) = 10\gamma,\\ &\psi(p,\ 6P,\ Z) = 10\alpha,\\ &\varphi(4p,\ 3P,\ Z) = 8\alpha + 16 6,\\ &\chi(3p,\ 4P,\ Z) = 16 6 + 8\alpha. \end{aligned}\right.$$

EXEMPLES. — 1° *Soit Z la condition ρ_m de toucher une surface donnée de l'ordre m.*

Alors, on trouve (*)

$$\begin{aligned} &\psi(6p,\ P,\ \rho_m) = 10m,\\ &\psi(p,\ 6P,\ \rho_m) = 10m(m-1)^2,\\ &\varphi(4p,\ 3P,\ \rho_m) = 8[2m(m-1) + m(m-1)^2],\\ &\chi(3p,\ 4P,\ \rho_m) = 8[m + 2m(m-1)]. \end{aligned}$$

Les deux derniers nombres se trouvent au moyen de la formule (3) (*Nouvelles Annales,* 2e série, t. V). La substitution de ces nombres dans les formules (6)

(*) Une section plane dans une surface de l'ordre m est en général une courbe de l'ordre m et de la classe $m(m-1)$. Un cône circonscrit à la surface est de l'ordre $m(m-1)$ et de la classe $m(m-1)^2$. Ce dernier nombre indique la classe de la surface. Par un point quelconque, on peut mener à la surface $4m(m-1)(m-2)$ plans tangents stationnaires (c'est-à-dire des plans dont la courbe d'intersection avec la surface a un point de rebroussement) et

$$\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m^3 - m^2 + m - 12)$$

plans tangents doubles. (*Voir,* par exemple, SALMON, *Geometry of three dimensions,* p. 201 à 218).

donne (*)

$$\alpha = m(m-1)^2, \quad \beta = m(m-1), \quad \gamma = m.$$

Dans le système (1, 1, 1) de quadriques qui se touchent suivant une conique, ou en particulier, de sphères concentriques, il y en aura, par conséquent,

$$\alpha + \beta + \gamma = m(m^2 - m + 1),$$

qui touchent une surface donnée de l'ordre m. Tel est donc le *nombre des normales* qu'on y peut mener par un point donné.

2° *Soit* Z *la condition* C *de toucher une courbe gauche donnée*. Nous désignerons son ordre par m, la classe de la surface développable qui y correspond par n, le nombre des plans tangents qu'on peut, par une droite, mener à la courbe (ou l'ordre de la surface développable) par r, le nombre des plans stationnaires (**) par a, et celui des points stationnaires (***) par b; l'ordre de la courbe double de la surface développable par x, et la classe de la surface enveloppe des plans doublement tangents à la courbe par y; le nombre des droites dans un plan quelconque qui sont sur deux plans tangents à la surface développable par g, et celui des droites par un point qui deux fois rencontrent la courbe par h (****). Alors

$$\begin{aligned}
\psi(6p,\ P,\ C) &= 0,\\
\psi(p,\ 6P,\ C) &= 10r,\\
\varphi(4p,\ 3P,\ C) &= 8(2m + r),\\
\chi(3p,\ 4P,\ C) &= 8.2m.
\end{aligned}$$

(*) Les mêmes résultats ont été trouvés, d'une autre manière, par M. de Jonquières (*Comptes rendus*).

(**) Des plans qui contiennent quatre points consécutifs de la courbe.

(***) Des points de la courbe situés sur quatre plans consécutifs tangents à la surface développable.

(****) Trois des nombres $m, n, r, a, b, x, y, g, h$ suffisent pour déterminer les six autres, selon les équations de M. Cayley (LIOUVILLE, *Journal de*

Les formules (6) donnent donc

$$\alpha = r, \quad 6 = m, \quad \gamma = 0.$$

Par un point donné, on peut faire passer $m + r$ normales à la courbe.

Pour caractériser la condition de toucher la surface développable qui a la courbe C pour arête de rebroussement, on trouve les valeurs $\alpha = 0$, $6 = n$, $\gamma = r$.

Le nombre des quadriques qui satisfont aux sept conditions $Z_1, \ldots Z_7$, et aux deux conditions Z et Z', peut, en général, être déterminé par une expression de la forme (*)

$$(7) \qquad A\alpha\alpha' + B66' + C\gamma\gamma' + D\Sigma 6\gamma' + E\Sigma\gamma\alpha' + F\Sigma\alpha 6',$$

où A, B, C, D, E et F dépendent des sept conditions $Z_1, \ldots, Z_7$, et $\alpha\alpha'$, $66'$, $\gamma\gamma'$, $\Sigma 6\gamma'$, $\Sigma\gamma\alpha'$, $\Sigma\alpha 6'$ des deux conditions Z et Z'. Dans le cas où Z et Z' sont des conditions indépendantes l'une de l'autre, les nombres $\alpha, 6, \gamma, \alpha', 6', \gamma'$ se déterminent distinctement de la manière que nous venons d'indiquer; mais Z et Z' forment *un couple inséparable de conditions* (ZZ') (par exemple celle de toucher deux fois une même surface ou courbe), on aura à déterminer les nombres composés $\alpha\alpha'$, $66'$, $\gamma\gamma'$, $\Sigma\beta\gamma'$,

---

Mathématiques, t. X, p. 245; 1845), dont six indépendantes les unes des autres peuvent s'écrire :

$$n = r(r-1) - 2x - 3m,$$
$$r = n(n-1) - 2g - 3a,$$
$$m - a = 3(r - n),$$
$$r = m(m-1) - 2h - 3b,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n,$$
$$n - b = 3(r - m).$$

(*) *Voir* le Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 413).

$\Sigma\gamma\alpha'$, $\Sigma\alpha\beta'$ (*). Ceux-ci serviront à caractériser la condition double.

Considérons, pour déterminer ces nombres, un système $[Z_1 \ldots Z_6, (ZZ')]$. Les caractéristiques de ce système ayant des expressions de la forme (7), il en sera de même, d'après les formules (1), (2) et (3), pour les nombres φ, χ, ψ qui y correspondent, de sorte qu'on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi[Z_1 \ldots Z_6, (ZZ')] &= A'\alpha\alpha' + B'\beta\beta' + C'\gamma\gamma' \\ &\quad + D'\Sigma\beta\gamma' + E'\Sigma\gamma\alpha' + F'\Sigma\alpha\beta', \\ \chi[Z_1 \ldots Z_6, (ZZ')] &= A''\alpha\alpha' + B''\beta\beta' + C''\gamma\gamma' \\ &\quad + D''\Sigma\beta\gamma' + E''\Sigma\gamma\alpha' + F''\Sigma\alpha\beta', \\ \psi[Z_1 \ldots Z_6, (ZZ')] &= A'''\alpha\alpha' + B'''\beta\beta' + C'''\gamma\gamma' \\ &\quad + D'''\Sigma\beta\gamma' + E'''\Sigma\gamma\alpha' + F'''\Sigma\alpha\beta'. \end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les coefficients A', B', A'', etc, on remplace successivement les conditions (ZZ') par les conditions simples et élémentaires : $2p$, de passer par deux points ; p, l, de passer par un point et de toucher une droite, etc. Alors, on trouve

$$A' = \varphi(Z_1 \ldots Z_6, 2p), \quad B' = \varphi(Z_1 \ldots Z_6, 2l);$$
$$A'' = \chi(Z_1 \ldots Z_6, 2p), \ldots.$$

D'après ce que nous avons dit précédemment, on peut déterminer ces coefficients si $Z_1 \ldots Z_6$ représentent des conditions simples et élémentaires. En prenant les différentes combinaisons possibles de celles-ci, on pourra former un grand nombre d'équations de la forme (8), dont six, indépendantes les unes des autres, suffiront pour dé-

---

(*) Comparer aux méthodes analogues pour les coniques planes, dues à MM. Chasles et Cremona (*Comptes rendus*, t. LIX, 22 août et 7 novembre 1864).

terminer les nombres cherchés $\alpha\alpha'$, $66'$, etc. Les autres donneront un moyen de vérifier les résultats obtenus. Nous ferons usage, dans nos exemples, des équations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \psi[6p, (ZZ')] = 10\gamma\gamma', \\ \psi[6p, (ZZ')] = 10\alpha\alpha', \\ \psi[p, 4l, P, (ZZ')] = 32\Sigma\alpha\gamma', \\ \varphi[3p, 3P, (ZZ')] = 8\alpha\alpha' + 16\Sigma\alpha\beta' + 3266', \\ \chi[3p, 3P, (ZZ')] = 3266' + 16\Sigma 6\gamma' + 8\gamma\gamma', \\ \varphi[2p, l, 3P, (ZZ')] = 16\alpha\alpha' + 32\Sigma\alpha 6' + 3266', \\ \chi[3p, l, 2P, (ZZ')] = 3266' + 32\Sigma 6\gamma' + 16\gamma\gamma'. \end{cases}$$

Le nombre de ces équations étant sept, l'une d'elles est superflue.

Exemples. — 1° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $66'$, etc., qui *correspondent à la condition d'un contact double avec une surface* ρ_m. Nous désignerons cette condition double par $(2\rho_m)$.

On trouve, dans ce cas, en ayant égard aux règles que nous avons données pour la multiplicité des quadriques singulières,

$$\psi[6p, (2\rho_m)] = 10\,\frac{m(m-1)}{2},$$

$$\psi[6P\,(2\rho_m)] = 10\,\frac{m(m-1)^2[m(m-1)^2-1]}{2},$$

$$\psi[p, 4l, P, (2\rho_m)] = 16.2m.m(m-1)^2,$$

$$\begin{aligned} &\varphi[3p, 3P, (2\rho_m)] \\ &\quad = 8\{2m(m-1)[m(m-1)+m(m-1)^2-3]\} \\ &\quad + \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m^3-m^2+m-12) \\ &\quad = 4m(m-1)(m^4+m^3-m^2-14m+12), \end{aligned}$$

$$\chi[3p, 3P, (2\rho_m)] = 8.2m(m-1)(m^2-3),$$

$$\varphi[2p, l, 3P, (2\rho_m)]$$
$$= 8\{2m(m-1)[m(m-1)+2m(m-1)^2-5]\}$$
$$+ m(m-1)(m-2)(m^3-m^2+m-12)$$
$$= 8m(m-1)(m^4+m^3-3m^2-12m+14),$$

$$\chi[3p, l, 2P, (2\rho_m)] = 8.2m(m-1)(m^2+m-5).$$

Les quatre dernières expressions se trouvent au moyen des formules (4), dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 255 et 256; les expressions des nombres φ, au moyen des formules (4*a*), et celles des nombres χ au moyen des formules (4*c*).

En substituant ces valeurs dans les formules (9), on trouve

$$\alpha\alpha' = \frac{1}{2} m(m-1)^2(m^3-2m^2+m-1),$$

$$\beta\beta' = \frac{1}{2} m(m-1)(m^2-m-1),$$

$$\gamma\gamma' = \frac{1}{2} m(m-1),$$

$$\Sigma\beta\gamma' = \frac{1}{4} m(m-1)(4m-9),$$

$$\Sigma\gamma\alpha' = \frac{1}{4} m^2(m-1)^2,$$

$$\Sigma\alpha\beta' = \frac{1}{4} m(m-1)(4m^3-8m^2-8m+15).$$

2° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... *qui correspondent à la condition d'un contact stationnaire avec une surface* ρ_m, c'est-à-dire à la condition que les courbes d'intersection des quadriques avec ρ_m aient des points de rebroussement. Nous désignerons cette condition par $(\rho_m)^2$.

On trouve, dans ce cas,

$$\psi[6p, (\rho_m)^2] = 0,$$
$$\psi[6\mathrm{P}, (\rho_m)^2] = 0,$$
$$\psi[p, 4l, \mathrm{P}, (\rho_m)^2] = 0,$$
$$\varphi[3p, 3\mathrm{P}, (\rho_m)^2] = 8[3m(m-1) + 4m(m-1)(m-2)]$$
$$= 8m(m-1)(4m-5),$$
$$\chi[3p, 3\mathrm{P}, (\rho_m)^2] = 8.3m(m-1),$$
$$\varphi[2p, l, 3\mathrm{P}, (\rho_m)^2] = 8.2[3m(m-1) + 4m(m-1)(m-2)]$$
$$= 16m(m-1)(4m-5),$$
$$\chi[3p, l, 2\mathrm{P}, (\rho_m)^2] = 8.6m(m-1).$$

Pour la détermination des quatre derniers nombres, nous avons fait usage des formules (11) dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 391 et 392.

En substituant ces valeurs dans les formules (9), on trouve

$$\alpha\alpha' = 66' = \gamma\gamma' = \Sigma\alpha\gamma' = 0,$$
$$\Sigma 6\gamma' = \frac{3}{2} m(m-1),$$
$$\Sigma\alpha 6' = \frac{1}{2} m(m-1)(4m-5).$$

Nous ferons une application de ces nombres : le lieu des pôles d'un plan donné, par rapport aux quadriques qui satisfont aux conditions $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_7$, est en général une surface de l'ordre $\frac{1}{2}\mathrm{N}(Z_1, \ldots, Z_7, l, \mathrm{P})$; et, si les conditions $Z_1, \ldots, Z_7$ comprennent la condition composée de passer par une conique située sur un plan donné : une surface de l'ordre $\frac{1}{2}\mathrm{N}(Z_1, \ldots, Z_7, l, \mathrm{P})$.

Or, si l'on désigne, avec M. Chasles, par Σ la condition de passer par une conique donnée, on trouve, au moyen

des caractéristiques de la quatorzième classe de M. Chasles, et d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour trouver les coefficients dans les formules (5):

$$N[\Sigma, l, P, (ZZ')]$$
$$= 4\alpha\alpha' + 8\beta\beta' + 8\gamma\gamma' + 8\Sigma\beta\gamma' + 8\Sigma\gamma\alpha' + 8\Sigma\alpha\beta'.$$

Par conséquent, le lieu des pôles d'un plan, par rapport aux quadriques qui passent par une conique donnée, située dans ce plan, et qui ont des contacts stationnaires avec ρ_m, est une surface de l'ordre

$$\frac{1}{4} N[\Sigma, l, P, (\rho_m)^2] = 3m(m-1) + m(m-1)(4m-5)$$
$$= 2m(m-1)(2m-1).$$

La conditon Σ peut être celle d'être une sphère, et alors le lieu trouvé est celui des centres des sphères qui ont des contacts stationnaires avec ρ_m. Ces *centres sont les centres de courbure des sections principales dans tous les points de* ρ_m. Par conséquent, *la surface des centres de courbure de la surface* ρ_m *est de l'ordre*

$$2m(m-1)(2m-1).$$

Pour $m = 2$, cet ordre est égal à 12 (*).

3° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ..., qui correspondent à *la condition d'un contact double avec la courbe* C de l'ordre m, correspondant à une surface développable de la classe n, ...

Comme dans un exemple précédent. Nous désignerons

(*) *Voir* Salmon, *Geometry of three dimensions*, p. 157, où se trouve toute l'équation de la surface des centres d'une quadrique.



cette condition double par (2C), alors, on trouve :

$$\psi[6p, (2C)] = 0,$$
$$\psi[6P, (2C)] = 10\,\frac{r(r-1)}{2},$$
$$\psi[p, 4l, P, (2C)] = 0,$$
$$\varphi[3p, 3P, (2C)] = 8[2m(m+r-3)+y],$$
$$\chi[3p, 3P, (2C)] = 8.4\,\frac{m(m-1)}{2},$$
$$\varphi[2p, l, 3P, (2C)] = 8[2m(m+2r-5)+2y],$$
$$\chi[3p, l, 2P, (2C)] = 8.4\,\frac{m(m-1)}{2}.$$

On trouve donc, en réduisant au moyen des formules de la quatrième note (p. 391)

$$\gamma\gamma' = \Sigma\beta\gamma' = \Sigma\alpha\gamma' = 0,$$
$$\alpha\alpha' = \frac{1}{2}\,r(r-1),$$
$$\beta\beta' = \frac{1}{2}\,m(m-1),$$
$$\Sigma\alpha\beta' = mr - \frac{1}{4}(3n+9m).$$

Pour caractériser la condition d'un contact double avec la surface développable qui a C pour arête de rebroussement, on aurait trouvé

$$\alpha\alpha' = \Sigma\alpha\beta' = \Sigma\alpha\gamma' = 0, \quad \gamma\gamma' = \frac{1}{2}\,r(r-1),$$
$$\beta\beta' = \frac{1}{2}\,n(n-1), \quad \Sigma\beta\gamma' = nr - \frac{1}{4}(3m+9n).$$

4° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... qui correspondent à la condition d'un contact du second ordre avec la courbe C. Nous désignerons cette condition par $(C)^2$.

Alors

$$\psi[6p, (C)^2] = 0,$$
$$\psi[6P, (C)^2] = 0,$$
$$\psi[p, 4l, P, (C)^2] = 0,$$
$$\varphi[3p, 3P, (C)^2] = 8(3m + n),$$
$$\chi[3p, 3P, (C)^2] = 0,$$
$$\varphi[2p, l, 3P, (C)^2] = 8.2(3m + n),$$
$$\chi[3p, l, 2P, (C)^2] = 0,$$

et, par conséquent,

$$\alpha\alpha' = 66' = \gamma\gamma' = \Sigma 6\gamma' = \Sigma\gamma\alpha' = 0, \quad \Sigma\alpha 6' = \frac{1}{2}(3m + n).$$

Le lieu des centres des sphères qui ont un contact du second ordre avec une courbe gauche C, c'est-à-dire *la surface développable, enveloppe des plans normaux de* C, *est de l'ordre* $3m + n$.

Pour caractériser la condition d'un contact stationnaire avec la surface développable qui a C pour arête de rebroussement, on aurait trouvé

$$\alpha\alpha' = 66' = \gamma\gamma' = \Sigma\alpha\gamma' = \Sigma\alpha 6' = 0, \quad \Sigma 6\gamma' = \frac{1}{2}(3n + m).$$

On peut aussi appliquer la méthode dont nous venons de faire usage à la discussion des systèmes de quadriques qui satisfont à des conditions triples. Le nombre de quadriques qui satisfont à une condition triple (Z, Z', Z'') et aux six conditions $Z_1, \ldots, Z_6$ se détermine par une expression de la forme

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} A\alpha\alpha'\alpha'' + B66'6'' + C\gamma\gamma'\gamma'' + D\Sigma\alpha\alpha'6'' + E\Sigma\alpha\alpha'\gamma'' \\ \quad + F\Sigma\alpha 6'6'' + G\Sigma 66'\gamma'' + H\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + I\Sigma 6\gamma'\gamma'' + K\Sigma\alpha 6'\gamma'', \end{array} \right.$$

où A, B,... dépendent des conditions $Z_1, \ldots, Z_6$, tandis que les nombres $\alpha\alpha'\alpha''$, $66'6''$,... dépendent de la con-

dition triple (Z, Z', Z''), et servent à la caractériser. Pour déterminer ces nombres, on peut faire usage des équations suivantes, qu'on trouve d'une manière analogue à celle qui nous a donné les équations (9) :

$$
(11)\left\{
\begin{aligned}
&\psi[5p, (ZZ'Z'')] = 30\gamma\gamma'\gamma'' + 10\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + 20\Sigma\beta\gamma'\gamma'',\\
&\psi[5P, (ZZ'Z'')] = 30\alpha\alpha'\alpha'' + 20\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 10\Sigma\alpha\alpha'\gamma'',\\
&\psi[p\ 4l, (ZZ'Z'')] = 32\Sigma\alpha\gamma'\gamma'',\\
&\psi[4l, P, (ZZ'Z'')] = 32\Sigma\alpha\alpha'\gamma'',\\
&\psi[p, P, 3l, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 48\Sigma\alpha\alpha'\gamma'' + 48\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + 32\Sigma\alpha\beta'\gamma'',\\
&\psi[3p, l, P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 60\gamma\gamma'\gamma'' + 20\Sigma\alpha\alpha'\gamma'' + 48\Sigma\beta\beta'\gamma'' + 60\Sigma\alpha\gamma'\gamma''\\
&\quad + 72\Sigma\beta\gamma'\gamma'' + 40\Sigma\alpha\beta'\gamma'',\\
&\psi[p, l, 3P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 60\alpha\alpha'\alpha'' + 72\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 60\Sigma\alpha\alpha'\gamma'' + 48\Sigma\alpha\beta'\beta''\\
&\quad + 20\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + 40\Sigma\alpha\beta'\gamma'',\\
&\varphi[2p, 3P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 8\alpha\alpha'\alpha'' + 32\beta\beta'\beta'' + 16\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 32\Sigma\alpha\beta'\beta'',\\
&\chi[3p, 2P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 32\beta\beta'\beta'' + 8\gamma\gamma'\gamma'' + 32\Sigma\beta\beta'\gamma'' + 16\Sigma\beta\gamma'\gamma'',\\
&\varphi[p, l, 3P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 16\alpha\alpha'\alpha'' + 16\beta\beta'\beta'' + 32\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + 32\Sigma\alpha\beta'\beta'',\\
&\chi[3p, l, P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 16\beta\beta'\beta'' + 16\gamma\gamma'\gamma'' + 32\Sigma\beta\beta'\gamma'' + 32\Sigma\beta\gamma'\gamma''.
\end{aligned}
\right.
$$

Le nombre des inconnues n'étant que dix, l'une de ces onze équations sera superflue. Nous ne ferons application de ces équations qu'à un seul exemple.

Déterminer les nombres $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$,.. qui correspondent à la *condition d'un contact triple avec une courbe*

gauche donnée de l'ordre m,.... Nous désignerons cette condition par (3C). Alors

$$\psi[5p, (3C)] = 0,$$

$$\psi[5P, (3C)] = 10y(r-2) + 2.10m\frac{(r-2)(r-3)}{2}$$
$$= 5(r-2)(2mr + r^2 - 7m - r - 3n),$$

$$\psi[p, 4l, (3C)] = 0,$$

$$\psi[4l, P, (3C)] = 0,$$

$$\psi[p, 3l, P, (3C)] = 0.$$

$$\psi[3p, l, P, (3C)] = 0,$$

$$\varphi[2p, 3P, (3C)]$$
$$= 8\frac{1}{3}[2m^3 + 6m^2r - r^3 - 30m^2 - 18mr + 13r^2$$
$$+ 84m - 42r + (6m + 3r - 26)y]$$
$$= \frac{4}{3}[4m^3 + 12m^2r + 6mr^2 + r^3 - 66m^2 - 45mr - 3r^2$$
$$+ 194m - 58r - 3n(6m + 3r - 26)],$$

$$\chi[3p, 2P, (3C)] = 8.4\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

$$\varphi[p, l, 3P, (3C)]$$
$$= 8\frac{1}{6}[(m+r)[-(m+r^2) - 7(m+r) + 48]$$
$$+ 4mr[3(m+r) - 13]$$
$$+ 2(h+y)(3m + 3r - 20)\}$$
$$= \frac{8}{3}[m^3 + 6m^2r + 6mr^2 + r^3 - 30m^2 - 39mr - 3r^2$$
$$+ 134m - 46r - 3n(3m + 3r - 20)],$$

$$\chi[3p, l, P, (3C)] = 8.2\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Pour déterminer les deux nombres φ, nous avons fait usage des formules (6a) dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 260. Les réductions, qui ont consisté à

remplacer y et h par n, sont faites au moyen des formules de la quatrième note de la page 391. En substituant ces valeurs dans les formules (11), on trouve

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \Sigma\alpha\alpha'\gamma'' = \Sigma 6 6'\gamma'' = \Sigma\alpha\gamma'\gamma'' = \Sigma 6\gamma'\gamma'' = \Sigma\alpha 6'\gamma'' = 0,$$

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{1}{6} r(r^2 - 3r - 20) - 3m - 2n,$$

$$66'6'' = \frac{1}{6} m(m-1)(m-2),$$

$$\Sigma\alpha\alpha'6'' = \frac{1}{4}[2mr^2 - 11mr + 32m - 18r - 3n(r-6)],$$

$$\Sigma\alpha 6'6'' = \frac{1}{4}[2m^2r - 9m^2 - 2mr + 18m - 4r - 3n(m-2)].$$

Dans ce cas-ci, on n'aura pas une vérification des résultats trouvés en cherchant une expression du nombre $\psi[p, l, 3P, (3C)]$, car cette expression contiendra le nombre inconnu des plans tangents triples de la courbe; mais comme $\alpha\alpha'\alpha''$, $66'6''$,... sont déjà connus, cette expression nous donnera le moyen de déterminer le nombre de ces plans singuliers. En désignant ce nombre par z, on trouve, après réductions :

$$\begin{aligned}\psi[p, l, 3P, (3C)] &= 6z + 3[8m^2r + 12mr^2 + 3r^2 - 36m^2 - 73mr - 9r^2 \\ &+ 150m - 38r - 3n(5r + 4m - 22)],\end{aligned}$$

ce qui donne, POUR LE NOMBRE DES PLANS TANGENTS TRIPLES DE LA COURBE C, l'expression

$$z = \frac{1}{6}[r^3 - 3mr - 3r^2 + 42m - 58r - 3n(3r - 26)].$$

Ce résultat est conforme aux formules que donne M. Salmon, *Geometry of three dimensions*, 2e édition, p. 460, et que ce savant géomètre obtient par des procédés très-différents.

Nous avons ainsi un exemple de l'usage qu'on peut faire de la théorie des caractéristiques des quadriques, dans la recherche des singularités des courbes à double courbure ; j'espère en donner plusieurs dans un autre article.

EXPOSÉ DES PRINCIPES ÉLÉMENTAIRES DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR UN ABONNÉ.

Notions préliminaires sur les permutations.

Considérons n lettres a, b, c,.. , k, l; on sait qu'on appelle *permutations* de ces n lettres tous les résultats différents qu'on obtient en écrivant ces lettres les unes à la suite des autres de toutes les manières possibles. On divise les permutations en deux classes de la manière suivante :

Comparons dans une permutation une lettre à chacune de celles qui la suivent, on dira qu'il y a un dérangement toutes les fois que la seconde lettre précéderait la première dans l'ordre de l'alphabet. On appelle *paires* ou *positives* les permutations dans lesquelles le nombre des dérangements est pair, *impaires* ou *négatives* les permutations dans lesquelles le nombre des dérangements est impair.

Ainsi la permutation

$$cdba,$$

est impaire, parce qu'elle présente cinq dérangements

$$cb,\quad ca,\quad db,\quad da,\quad ba,$$



la permutation

$$cbda,$$

est paire, parce qu'elle a quatre dérangements

$$cb, \quad ca, \quad ba, \quad da.$$

Au lieu de lettres différentes, on peut prendre la même lettre affectée d'un indice variable. Par exemple, au lieu de

$$a, \quad b, \quad c, \ldots, \quad l,$$

on peut écrire

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, \quad a_n.$$

Dans ce cas, il y a dérangement toutes les fois que l'indice d'une lettre est inférieur à celui d'une lettre qui la précède.

Soit a_i une lettre, a_k une des lettres qui viennent après a_i : il y aura dérangement si

$$i - k > 0;$$

il n'y aura pas de dérangement si

$$i - k < 0.$$

Remarquons que $i - k$ ne peut être nul, car une lettre n'est jamais répétée deux fois dans la permutation. Il résulte de là la règle suivante.

Soit

$$a_{\alpha_1}, \quad a_{\alpha_2}, \ldots, \quad a_{\alpha_n}$$

une permutation quelconque des lettres

$$a_1, \quad a_2, \ldots, \quad a_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant les indices 1, 2, 3, ..., n rangés dans un ordre quelconque. La permutation des lettres ou des indices (ce qui revient au même) sera paire ou im-

paire suivant que le produit

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_n),\\ (\alpha_2 - \alpha_3)\ldots(\alpha_2 - \alpha_n),\\ (\alpha_3 - \alpha_n),\\ \ldots\ldots\\ (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\end{array}\right.$$

sera positif ou négatif.

En effet, à tout dérangement correspondra un facteur négatif dans le produit précédent, et, par suite, le produit sera positif s'il y a un nombre pair de dérangements et négatif dans le cas contraire.

Théorème. — *Si dans une permutation quelconque on échange deux indices, la permutation change de classe.*

Pour démontrer cette proposition, nous allons faire voir que le produit (1) change de signe lorsqu'on échange deux indices α_i et $\alpha_{i'}$.

Dans ce produit, se trouvent d'abord des facteurs qui ne contiennent ni α_i ni $\alpha_{i'}$. Ces facteurs ne sont pas changés.

Il y a aussi des facteurs qui contiennent soit α_i, soit $\alpha_{i'}$, avec un autre indice α_k. On peut les grouper de manière à avoir le produit

$$(\alpha_i - \alpha_k)(\alpha_k - \alpha_{i'}) \quad \text{ou} \quad (\alpha_i - \alpha_k)(\alpha_{i'} - \alpha_k)$$

ou

$$(\alpha_k - \alpha_i)(\alpha_{i'} - \alpha_k) \quad \text{ou} \quad (\alpha_k - \alpha_i)(\alpha_k - \alpha_{i'}),$$

et quand on permute α_i et $\alpha_{i'}$, le produit de ces deux facteurs ne change pas de signe.

Enfin, le produit (1) contient le facteur

$$\alpha_i - \alpha_{i'},$$

qui change de signe par la permutation des indices. Donc

en définitive, le produit total change de signe, et par suite la permutation change de classe.

Corollaire. — Le nombre des permutations paires est égal au nombre des permutations impaires.

En effet, par l'échange de deux indices quelconques toutes les permutations changent de classe ; il y en a donc autant de paires que d'impaires. Le nombre des permutations contenues dans chaque classe est

$$3.4.5\ldots n.$$

Définition du déterminant.

Considérons les n^2 lettres

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1}, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, \ldots, & a_{2,m}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & a_{n,n}. \end{array}$$

Dans le produit

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots a_{n,n},$$

on laisse les premiers indices invariables et l'on permute les seconds ; on donne aux nouveaux produits ainsi obtenus le signe + ou le signe —, suivant que la permutation des seconds indices est paire ou impaire. La somme de tous les produits ainsi obtenus constitue le déterminant des n^2 lettres ; ces lettres s'appellent les *éléments* du déterminant. (Il est clair qu'après avoir formé chaque terme, on pourra écrire ses n facteurs dans un ordre quelconque.)

Le déterminant se représente par le produit de ses élé-

ments placé entre deux barres

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

On voit que dans une ligne verticale ou *colonne* le second indice reste le même. Dans une ligne horizontale ou *ligne*, le premier indice ne change pas.

Loi de formation des termes. — Le déterminant contient un nombre de termes égal à 1, 2, 3,..., n, il y a autant de termes positifs que de termes négatifs. Dans chaque terme il y a un élément et un seul de chaque ligne et de chaque colonne.

Ainsi, si dans un terme figure l'élément $a_{i,k}$, il n'y aura plus d'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne, ni de la $k^{\text{ième}}$ colonne, car le premier indice i ou le second indice k ne sont jamais répétés.

Règle des signes. — On peut donner une règle générale et commode pour la détermination du signe d'un terme.

Soit un terme quelconque

$$a_{\alpha_1, i_1}, \quad a_{\alpha_2, i_2}, \ldots, \quad a_{\alpha_n, i_n},$$

dans lequel les premiers et seconds indices ne sont autre chose que les indices 1, 2, 3,..., *n écrits dans un ordre quelconque. On donnera au terme le signe* + *ou le signe* — *suivant que les permutations des premiers et seconds indices seront de même classe ou de classe différente.*

En effet, si nous permutons deux lettres, ce qui ne change pas le produit, cela revient à permuter à la fois

deux seconds indices et deux premiers indices. Donc les deux permutations changent ensemble de classe. On peut supposer que l'une des permutations, celle des premiers indices, par exemple, ait été ramenée par une série d'échanges à la permutation

$$1.2.3\ldots n,$$

et soit paire. Alors on donnera le signe + ou le signe − suivant que l'autre permutation sera paire ou impaire. On voit que c'est bien la règle que nous avons établie.

Il résulte de cette règle la conséquence suivante. Les deux termes

$$a_{1,\alpha_1},\quad a_{2,\alpha_2},\ldots,\quad a_{n,\alpha_n},$$
$$a_{\alpha_1,1},\quad a_{\alpha_2,2},\ldots,\quad a_{\alpha_n,n},$$

se trouvent dans le déterminant avec le même signe, car la permutation des premiers indices dans l'un des termes est la permutation des seconds indices dans l'autre. Donc le déterminant ne changera pas si l'on échange les seconds indices avec les premiers indices. En d'autres termes :

Un déterminant ne change ni de signe ni de valeur quand on change les lignes en colonnes et les colonnes en lignes.

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Théorème. — *Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe sans changer de valeur.*

En effet, cet échange revient à l'échange de deux in-

dices, et le terme qu'on obtient en faisant cet échange doit donc se trouver dans le déterminant avec le signe opposé.

Corollaire. — Lorsque, dans un déterminant, deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant se réduit à o.

En effet, l'échange de ces deux colonnes identiques laisse le déterminant invariable, et il devrait en changer le signe. Donc le déterminant est nul.

Propriété essentielle. — Le déterminant est une fonction linéaire et homogène des éléments d'une ligne ou d'une colonne.

En effet, nous avons vu que chaque terme doit contenir un élément d'une ligne ou d'une colonne, et un seul.

Corollaire I. — Quand on multiplie ou on divise tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre, le déterminant est multiplié ou divisé par ce nombre.

Corollaire II. — Quand les éléments d'une ligne ou d'une colonne peuvent se décomposer en une somme de deux éléments, le déterminant se décompose en une somme de deux déterminants. Ainsi

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & a_1 & d_1 \\ b_2 + c_2 & a_2 & d_2 \\ b_3 + c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Corollaire III. — Si l'on ajoute aux éléments d'une ligne ou d'une colonne ceux d'autres lignes ou colonnes multipliés par des constantes, la valeur du déterminant

n'est pas changée. Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_1 + mb_1 + nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 + nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 + nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + n \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Les deux derniers déterminants sont nuls, parce qu'ils ont des colonnes identiques.

Formation du déterminant.

Si l'on applique la règle que nous avons donnée, on trouve

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ac_1b_2 + bc_1a_2 - ba_1c_2 + ca_1b_2 - cb_1a_1,$$

....

Dans le cas du déterminant de neuf éléments, il y a une règle simple qui est due à Sarrus et qu'on peut énoncer de la manière suivante.

On écrit les deux premières lignes au-dessous de la

dernière

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix}$$

Les trois termes positifs sont $ab_1c_2 + a_1b_2c + a_2bc_1$, et sont donnés par les trois diagonales inclinées de gauche à droite. Les termes négatifs sont donnés par les autres diagonales cb_1a_2, c_1b_2a, c_2ba_1, inclinées de droite à gauche.

Voici du reste une règle qui permettra de décomposer un déterminant en une somme de déterminants d'ordre moindre.

Il est évident que, dans le déterminant

$$\text{(A)} \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

le coefficient de $a_{1,1}$ est le déterminant d'ordre moindre

$$\text{(B)} \qquad \begin{vmatrix} a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

obtenu en supprimant la ligne et la colonne à laquelle appartient l'élément $a_{1,1}$. En effet, tout terme du déterminant (B) multiplié par $a_{1,1}$ se trouvera dans le déterminant (A), et il s'y trouvera avec le signe qu'il a dans le déterminant (B), puisqu'en plaçant devant ce terme l'élément $a_{1,1}$, on n'introduit aucun dérangement.

Considérons maintenant un élément quelconque a_{ik}. On peut échanger la colonne dont fait partie cet élément

avec la colonne précédente, et ainsi de suite jusqu'à ce que la $k^{ième}$ colonne soit devenue la première. De même on peut échanger la $i^{ième}$ ligne avec la $i - 1^{ième}$, puis avec la $(i - 2)^{ième}$. L'élément a_{ik} occupera la première place. On voit qu'on pourra toujours amener l'élément a_{ik} à la première place, et il résulte de là la règle pratique sur la démonstration de laquelle nous n'insisterons pas davantage :

Le coefficient de a_{ik} est, au signe près, le déterminant dans lequel on a supprimé la ligne et la colonne à laquelle appartient a_{ik}. Il faut prendre ce déterminant avec le signe + si $i+k$ est pair, avec le signe — si $i+k$ est impair, en sorte que si l'on désigne ce déterminant par Δ_{ik}, le coefficient de a_{ik} sera

$$(-1)^{i+k}\Delta_{ik}.$$

Il y a une règle pratique très-simple pour avoir le signe avec lequel on doit prendre Δ_{ik}. L'élément a_{ik} appartient à la $i^{ième}$ ligne et à la $k^{ième}$ colonne. On peut, pour arriver à cet élément, partir de l'élément $a_{1,1}$ en suivant la première colonne jusqu'à la $i^{ième}$ ligne, puis la $i^{ième}$ ligne jusqu'à la $k^{ième}$ colonne. On change de signe à chaque nouvelle ligne ou colonne, et l'on obtient en définitive le signe avec lequel il faut prendre Δ_{ik}.

$$\begin{array}{|l}
a_{1,1} \\
a_{2,1} \\
\cdots \\
\underline{a_{i,1}\ a_{i,2} \ldots\ a_{ik}}
\end{array}$$

Nous avons vu que le déterminant est une fonction linéaire des éléments d'une ligne ou d'une colonne. On pourra au moyen de la remarque précédente trouver les

coefficients de ces éléments. Ainsi on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$+ c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

. . . .

On dit dans ce cas que l'on ordonne le déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne. En prenant tous les éléments d'une ligne ou tous ceux d'une colonne, on sera sûr d'avoir le développement complet du déterminant.

Les déterminants obtenus en supprimant un certain nombre de lignes et un nombre égal de colonnes s'appellent *déterminants mineurs*.

(*La suite prochainement.*)

THÉORIE DES ASYMPTOTES;

Par M. H. LAURENT,
Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique.

On appelle asymptote d'une branche de courbe infinie, une droite telle que la distance d'un point de la branche à cette droite diminue indéfiniment.

Voyons d'abord à quelles conditions l'axe des x pourra être une asymptote d'une courbe donnée. Il faut évidemment et il suffit que lorsque l'y tend vers zéro, l'x augmente indéfiniment en valeur absolue ; mais il ne faudrait pas dire que pour $y=0$ l'équation de la courbe doit avoir une racine infinie, car il pourrait arriver que cette racine infinie existât indépendamment de l'hypothèse $y=0$.

Bornons-nous au cas des courbes algébriques; leur équation est de la forme suivante (a_i désignant un polynôme du degré i en y) :

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots = 0.$$

Si l'on divise par x^m et si l'on fait $y=0$, on reconnaît que l'équation précédente ne peut avoir de racines infinies que si a_0 est nul ; mais a_0 ne contenant pas y, on voit que le terme de degré m en x ne doit pas exister dans l'équation ; cette équation a donc une racine infinie en x, quel que soit y, on ne peut donc pas dire que

$$\lim x = \infty \quad \text{pour} \quad y=0;$$

pour satisfaire à cette condition, nous diviserons par x^{m-1}, puis, faisant converger y vers zéro, il viendra

$$a_1 = 0 \quad \text{pour} \quad y=0;$$

si a_1 est une quantité nulle quel que soit y, on posera

$$a_2 = 0 \quad \text{pour} \quad y=0,$$

et ainsi de suite.

On conclut immédiatement de là qu'une asymptote de courbe algébrique est une tangente dont le point de contact est à l'infini, car supposer $a_0=0$ et $a_1=0$, c'est supposer que l'axe des x, qui est l'asymptote, a deux points communs avec la courbe à l'infini.

On en conclut aussi que si une droite est asymptote

à une branche de courbe, elle est asymptote à une seconde branche, puisque l'asymptote rencontre la courbe en *deux* points situés à l'infini.

Procédons maintenant à la recherche générale des asymptotes des courbes algébriques. Soit

$$(1) \qquad f(x,y)=0.$$

leur équation.

Transportons l'origine en un point η, ξ, et faisons tourner les axes de l'angle α, θ étant l'angle des axes primitifs; on aura pour équation transformée

$$f\left[\xi+\frac{x\sin(\theta-\alpha)-y\sin\alpha}{\sin\theta},\ \eta+\frac{x\sin\alpha+y\sin(\theta+\alpha)}{\sin\theta}\right]=0;$$

en faisant $y=0$, il vient

$$(2) \qquad f\left[\xi+x\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\ \eta+x\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]=0.$$

Cette équation en x doit avoir deux racines infinies pour que l'axe des x soit une asymptote; en écrivant ces deux conditions, on aura deux équations en ξ, η, α; l'élimination de α fera connaître une relation entre ξ et η, qui sera l'équation d'une asymptote ou de leur ensemble, selon que l'élimination aura été faite, partiellement par substitution, ou d'une manière générale.

Désignons par φ, χ, ψ, ϖ,... respectivement les termes de f qui sont des degrés m, $m-1$, $m-2$, $m-3$,..., la formule (2) pourra s'écrire

$$x^m\varphi\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\ \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]$$
$$+x^{m-1}\left\{\xi\varphi'_\xi\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\ \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]+\eta\varphi'_\eta\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\ \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]\right.$$
$$\left.+\chi\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\ \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]\right\}+\ldots;$$

on aura donc, pour déterminer les angles α que font les asymptotes avec les axes,

$$(3) \qquad \varphi[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\alpha]=0,$$

et, pour déterminer les asymptotes elles-mêmes,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi\varphi'_{\xi}[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\alpha]+\eta\varphi'_{\eta}[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\alpha] \\ \qquad\qquad +\chi[\sin(\theta-\alpha),\ \sin\theta]=0. \end{array} \right.$$

Si cette formule devenait identique, on la remplacerait par la suivante :

$$(5) \quad \xi^2\varphi''_{\xi^2}+2\eta\xi\varphi''_{\xi\eta}+\eta^2\varphi''_{\eta^2}+2\xi\chi'_{\xi}+2\eta\chi'_{\eta}+2\psi=0,$$

et ainsi de suite.

Application à l'hyperbole $x^2-y^2=1$.

Supposons les coordonnées rectangulaires, on a, au lieu de (3),

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0,$$

et, au lieu de (4),

$$\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha=0.$$

L'élimination de α donne immédiatement le faisceau des asymptotes

$$\xi^2-\eta^2=0.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 847

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 137);

PAR M. T. DOUCET,
Professeur au lycée de Lyon.

Par une droite tangente à une surface quelconque en un point M, *on mène différents plans sécants; on construit pour chacune des sections que ces plans déterminent dans la surface la parabole qui suroscule la section au point* M : *le lieu des foyers de ces paraboles est un cercle.*

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface. Rapportons-la à des axes rectangulaires, prenons pour origine le point M et pour plan des xy le plan tangent en ce point, puis appliquons à la fonction z le développement de Maclaurin. On aura

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + \ldots,$$

les coefficients a, b, ..., ayant une signification connue.

Si l'on choisit, en outre, comme axe des x, la droite considérée, la section faite dans la surface par un plan incliné de l'angle θ sur le plan tangent aura pour équation dans son plan

$$(1) \qquad \beta \sin\theta = a\alpha^2 + b\alpha\beta\cos\theta + c\beta^2\cos^2\theta + d\alpha^3 + \ldots;$$

l'axe des α est Mx et l'axe des β est la trace du plan sécant sur zMy.

Une parabole située dans le plan sécant et tangente en M à l'axe Mx a une équation de la forme

$$(2) \qquad (\beta - m\alpha)^2 = 2n\beta.$$

Si l'on substitue dans (1) α déduit de l'équation (2) en fonction de $\sqrt{\beta}$ et qu'on exprime que l'équation résultante est satisfaite par $(\sqrt{\beta})^4 = 0$, la parabole et la courbe (1) ont en M quatre points communs. On trouve les deux conditions

$$(3) \qquad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{2an}{m^2}, \\ \dfrac{2a}{m^2} + \dfrac{b\cos\theta}{m} + \dfrac{2nd}{m^3} = 0. \end{cases}$$

L'axe de la parabole a pour équation

$$\beta = m\alpha + \frac{n}{1+m^2};$$

le foyer est en outre sur la droite

$$\beta + m\alpha = 0;$$

les coordonnées β' et α' de ce foyer sont donc

$$\beta' = \frac{n}{2(1+m^2)}, \quad \alpha' = -\frac{n}{2m(1+m^2)},$$

et, par rapport aux axes primitifs,

$$(4) \quad z = \frac{n\sin\theta}{2(1+m^2)}, \quad y = \frac{n\cos\theta}{2(1+m^2)}, \quad x = -\frac{n}{2m(1+m^2)}.$$

L'élimination de n entre les trois équations (4) donne

$$\frac{z}{y} = tg\,\theta, \quad z + mx\sin\theta = 0;$$

entre les deux équations (3) elle donne

$$m(ab\cos\theta + d\sin\theta) + 2a^2 = 0.$$

De ces trois dernières on tire immédiatement

(5) $$dz + aby - 2a^2x = 0.$$

Substituant les valeurs de m et de n dans celle de z, on a

(6) $$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z}{4a} = 0,$$

équation d'une sphère.

Le lieu cherché est donc une circonférence, intersection de la sphère (6) par le plan (5).

L'examen des équations (5) et (6) indique facilement les particularités que peut présenter cette circonférence.

Note. — M. Neuberg, professeur à Bruges, nous a envoyé une solution très-élégante de la même question; nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de l'insérer.

La solution de M. Pellet se rapproche de celle de M. Doucet.

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une Lettre de M. Abel Transon à M. Gerono.*

« ... A l'occasion des articles sur le *calcul directif* publiés dans les *Nouvelles Annales*, j'ai reçu de M. Bellavitis plusieurs Lettres dans lesquelles il me dit avoir, dès l'année 1826, émis l'opinion que l'idée vulgairement admise sur les quantités imaginaires constitue une véritable tache dans une science qui prétend justement se baser sur le pur raisonnement. Ayant eu ensuite con-

naissance de la manière, déjà ancienne alors, de représenter les imaginaires, il a reconnu dans cette représentation leur image véritable et leur complète explication. Dès lors aussi il a pensé que l'algèbre des imaginaires pouvait constituer une méthode nouvelle pour la géométrie, et il a appelé cette algèbre le *Calcul des équipollences*.

» En 1835, M. Bellavitis a publié un essai sur les principes de ce calcul dans les *Annales de Mathématiques de Fusinieri*, et il a développé ces principes plus tard dans plusieurs Mémoires.

» Et dès l'année 1832, dans ce même journal de Fusinieri, il avait donné cette proposition très-générale que, « *à toute relation entre des points en ligne droite correspond une relation analogue entre un même nombre de points situés sur un plan.* » Il cite en exemple que, comme entre quatre points placés sur une droite dans l'ordre A, B, A', B', il existe la relation connue

$$AA'.BB' = AB.A'B' + AB'.BA',$$

tout quadrilatère donne lieu entre ses côtés et ses diagonales à une relation dont la forme algébrique est la même, mais qui implique la considération des angles entre les éléments de la figure.

» Ainsi, dès cette époque ancienne, M. Bellavitis était en possession du théorème que j'ai donné moi-même dans mon dernier article et au moyen duquel on transfigure aisément la plupart des résultats de la *Géométrie supérieure*, résultats d'ailleurs si intéressants par eux-mêmes.

» M. Bellavitis m'indique dans ses Lettres d'autres applications très-diverses du *calcul des équipollences*, lequel me paraît être identique avec ce que j'ai appelé le *calcul directif*. J'espère pouvoir être en mesure ulté-

rieurement de faire connaître aux lecteurs des *Nouvelles Annales* le détail des travaux de M. Bellavitis sur cette matière. Il me suffira en ce moment d'exprimer la satisfaction bien naturelle que j'éprouve de pouvoir ajouter, aux autorités que j'avais citées en faveur de la nouvelle théorie des quantités improprement appelées *imaginaires*, l'autorité de l'illustre professeur de l'université de Padoue.... »

2. Nous avons reçu de Bordeaux une Lettre que nous mettons sous les yeux de nos lecteurs, à cause des précieux renseignements bibliographiques qu'elle renferme.

« Mon cher ami,

» Je viens de lire avec intérêt, dans les derniers numéros des *Nouvelles Annales*, les articles consacrés par M. Abel Transon à une théorie bien négligée jusqu'ici en France, quoiqu'elle soit due en grande partie à des géomètres français. Je n'ai pu qu'être très-flatté de la manière dont l'auteur mentionne le travail que j'ai entrepris sur ce sujet; mais j'aurais désiré que mon érudition ne fût pas invoquée comme une autorité compétente à propos de l'historique de cette théorie, car je me suis rendu coupable, dans mes indications, d'une omission trop grave pour conserver quelques prétentions à une connaissance complète du sujet. C'est cette omission que je prie aujourd'hui la rédaction des *Nouvelles Annales* de m'aider à réparer.

» Dès l'année 1832, un des plus savants géomètres dont s'honore en ce moment l'Italie, M. le professeur Giusto Bellavitis, de Padoue, a fait connaître, dans divers écrits, une méthode géométrique, inventée par lui, et à laquelle il a donné le nom de *Méthode des Équipollences*. Il ne s'est pas contenté, comme Argand, Mourey et d'au-

tres d'en poser les principes et d'en tirer les conséquences immédiates, il en a fait un instrument d'Analyse qui permet de traiter les questions de Géométrie pure par des règles analogues à celles de la résolution des équations algébriques.

» Sa théorie, qu'il a étendue à toutes les branches de la Géométrie, conduit naturellement aux Quaternions d'Hamilton, présentés sous leur forme la plus simple. L'auteur a développé ses recherches dans plusieurs Mémoires écrits avec une clarté remarquable et renfermant les applications les plus intéressantes. Je citerai, parmi ceux que j'ai sous les yeux, les suivants :

« *Sposizione del metodo delle Equipollenze,* Modène, 1854 (85 p. in-4°);

» *Calcolo dei Quaternioni di W.-R. Hamilton e sua relazione col metodo delle Equipollenze,* Modène, 1858 (62 p. in-4°);

» *Sposizione dei nuovi metodi di Geometria analitica,* Venise, 1860 (150 p. in-4°);

» *Elementi di Geometria,* etc., *Vi e aggiunta l'esposizione del calcolo delle Equipollenze,* Padoue, 1862, in-8°.

» Je me propose de résumer, en quelques pages, les fondements de cette méthode. Si je parviens à le faire avec une clarté suffisante, j'offrirai cette esquisse aux *Nouvelles Annales*.

» Je veux aussi, en terminant ma Lettre, montrer le cas que l'on fait de la découverte d'Argand de l'autre côté du Rhin, par un passage de l'ouvrage de M. Hankel (*Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, Leipzig, 1867, p. 82):

« Le premier, dit Hankel, qui ait établi la représentation des nombres imaginaires A + B*i* par des points d'un plan, et les opérations fondamentales d'addition et de

» multiplication, est Argand, qui a publié ses idées en 1806
» dans un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de*
» *représenter les quantités imaginaires dans les con-*
» *structions géométriques* (Paris).

» Cet opuscule n'arriva cependant à la connaissance
» du public que par une Note de Français (*Annales*
» *de Gergonne*, t. IV, 1813-14, p. 61), et deux articles
» d'Argand en réponse à cette Note (*l. c.*, t. IV, p. 133,
» et t. V, p. 197). Dans ces Mémoires, la théorie est
» traitée si complétement, que depuis on n'y a rien
» ajouté d'essentiellement nouveau, et si l'on ne parvient
» pas à découvrir un travail d'une date antérieure, on
» devra reconnaître Argand comme le vrai fondateur
» de la théorie géométrique des quantités complexes.

» Toutefois ces idées, malgré leur publication dans un
» journal généralement répandu, n'ont pas été connues,
» même en France, comme elles auraient dû l'être. Car
» en 1828, C.-V. Mourey les présenta de nouveau (*La*
» *vraie théorie des quantités*, etc.), et, la même année,
» en Angleterre, John Warren fit paraître plusieurs Mé-
» moires sur ce sujet.

» On sait que Gauss a développé la même idée en 1831
» (*Œuvres*, t. II, p. 174). Quelque grand que soit le
» service rendu par ce géomètre en faisant pénétrer
» cette doctrine dans la science, cependant la priorité
» ne peut lui appartenir en aucune façon. »

X.

3. *Sur l'enseignement de la Géométrie descriptive.*

« Monsieur le Rédacteur,

» Je vous adresse quelques notes sur l'enseignement de la Géométrie descriptive ; ces notes sont relatives à la partie grammaticale de l'enseignement, et vous penserez

comme moi, je l'espère, qu'elles doivent être utiles aux professeurs et aux élèves.

» Dans tout enseignement scientifique il est indispensable, chacun le sait, d'adopter, en les créant au besoin, certains mots qui servent à désigner des choses dont l'emploi est de tous les instants; l'utilité de ces mots est d'éclaircir et d'abréger le discours en exprimant par le seul nom qu'on impose ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement; il faut seulement prendre garde qu'on abuse de la liberté qu'on a d'imposer des noms, soit en donnant le même nom à deux choses différentes, soit en étendant sans mesure la liste des mots nouveaux.

» C'est par une juste application de ce principe que Monge introduisit certaines dénominations, aujourd'hui adoptées partout, et relatives à la génération de diverses surfaces, comme : *plan méridien, plan de parallèle, conrbe méridienne,* etc.

» Mais, après Monge, on a souvent, surtout dans l'enseignement oral, violé la règle; par exemple, on a nommé *verticale* l'intersection d'un plan quelconque par un plan parallèle au plan vertical de projection : c'est un véritable détournement; ainsi encore on a dit : *les principales* d'un plan pour désigner les droites d'un plan parallèles aux plans de projection : principales en quoi? et, d'ailleurs, ici encore il y a détournement, car, dans l'étude générale des surfaces, un sens très-déterminé est déjà attribué à ces mots : *lignes principales, sections principales*.

» Je crois avoir respecté les lois de la grammaire et de l'usage en acceptant les dénominations qui suivent :

» Tout plan parallèle au plan horizontal de projection

est un *plan de niveau*, ou un *plan horizontal*; toute ligne, droite ou courbe, tracée sur un plan de niveau se nomme *ligne horizontale* ou *ligne de niveau*;

Tout plan parallèle au plan vertical de projection se nomme un *plan de front*, et toute ligne d'un tel plan se nomme *ligne de front*;

» Toute droite perpendiculaire à un plan se nomme un *axe* de ce plan;

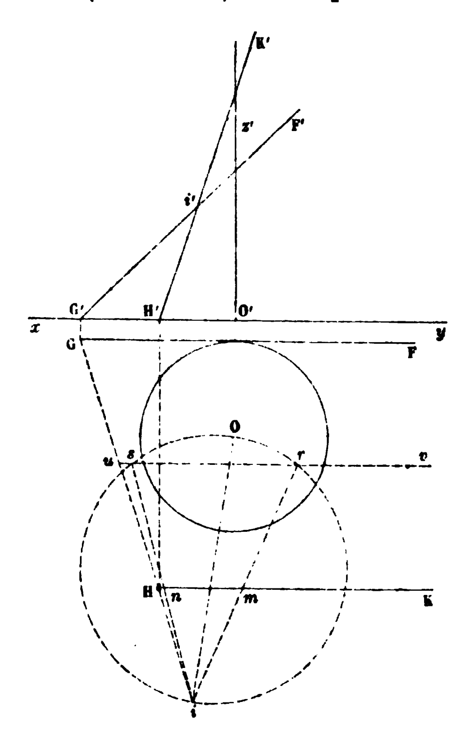
» Tout plan perpendiculaire à la ligne de terre se nomme un *plan de profil*;

» Comme l'exécution d'une épure amène très-souvent un déplacement momentané de la ligne de terre, tout plan vertical peut devenir momentanément plan de profil ou plan de front.

» Les Professeurs, qui sont familiarisés avec les applications de la Géométrie descriptive, reconnaîtront que ces mots ne sont ni nouveaux, ni détournés de leur sens ordinaire; et je vais montrer sur un exemple comment ils abrégent le discours; je choisirai le procédé de Duleau (*voir* la *Correspondance de l'École Polytechnique*) pour déterminer l'intersection de la surface gauche de révolution par une droite : cette solution, très-simple au point de vue graphique, très-conforme aux principes, a en outre le mérite de s'adapter facilement à toutes les dispositions de l'épure.

» L'axe de l'hyperboloïde étant vertical, la droite donnée (HK, H'K) est supposée de front; et (GF, G'F') est une génératrice de front sur l'hyperboloïde. Considérons comme surface auxiliaire le paraboloïde équilatère ayant pour directrices les droites (GF, G'F') et (HK, H'K'), et pour plan directeur le plan horizontal; les projections horizontales des génératrices de ce paraboloïde sont, on le sait, concourantes, et le point de concours i résulte immédiatement des données. Cela

posé, chaque génératrice du paraboloïde rencontre la droite donnée (HK, H′K′) en un point X, rencontre



(GF, G′F′) en un point Y, et rencontre encore l'hyperboloïde en un point Z ; le milieu de XY décrit dans l'espace une droite de front qui a pour projection horizontale la ligne *uv* équidistante de HK et de GF ; le milieu de YZ décrit dans l'espace une ligne qui a pour projection horizontale la circonférence décrite sur *oi* comme diamètre ; cette circonférence est coupée par *uv* en deux points *r* et *s* ; donc *ir* et *is* sont les projections horizontales de deux génératrices du paraboloïde, pour chacune desquelles le milieu du segment YX coïncide avec le mi-

lieu du segment YZ; donc *ir* et *is* marquent sur HK les projections horizontales des intersections cherchées.

» Le lecteur verra sans peine que la construction précédente s'applique aux cas particuliers de l'épure.

» Le procédé que je viens de raconter sommairement, et qui n'est pas nouveau, me remet en mémoire un autre procédé également et même plus ancien : c'est le moyen employé par Monge, reproduit par Hachette, pour mener des plans tangents à une surface de révolution par une droite; ce procédé, bien connu de tous les professeurs spéciaux et enseigné par plusieurs, consiste à employer une surface auxiliaire, à savoir l'hyperboloïde engendré par la droite donnée tournant autour de l'axe donné; on peut d'ailleurs le lire expliqué tout au long dans la *Géométrie descriptive* de Hachette. » VAZEILLE.

BIBLIOGRAPHIE.

(Tous les Ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE; par *L. Painvin* : *Géométrie plane*, gr. in-4 lithographié, 800 pages. — Prix : 23 fr.

On voit, par la lecture attentive de cet Ouvrage, que l'Auteur s'est proposé d'atteindre un double but : d'abord, venir en aide aux élèves qui commencent l'étude de l'Analytique et se préparent aux Écoles; et, en second lieu, offrir aux élèves déjà formés des ressources plus étendues pour aborder par le calcul les études géométriques.

Les matières du Programme de l'enseignement classique y sont amplement traitées; toutes les discussions, longuement développées, ne laissent subsister aucune difficulté sérieuse.

Dans une étude très-complète de la ligne droite, l'Auteur fait passer en revue les formules fondamentales de l'analyse géométrique; il insiste sur la notation, le sens, les signes des segments, sur les formules qui donnent le partage d'un segment en un rapport donné : ces formules, qui jouent un rôle important dans l'Analytique, seront fréquemment employées dans la recherche des tangentes, des polaires, etc. Nous signalerons en particulier l'étude des points multiples, où se trouvent des remarques intéressantes sur l'ordre du contact dans le cas des points de rebroussement, puis l'étude des points à l'infini à l'aide des coordonnées homogènes; le procédé indiqué, qui s'applique sans rien changer à l'équation de la courbe, et qui, cependant, ramène si souvent la question à une transformation par la perspective, offre beaucoup de netteté et supprime le vague et l'incertitude que laissent subsister les anciennes méthodes, principalement lorsque l'asymptote est à l'infini. Nous ferons encore remarquer d'heureuses modifications dans la réduction algébrique de l'équation du second degré à deux variables, dans les formules relatives aux diamètres imaginaires de l'hyperbole à l'aide de l'introduction d'un paramètre angulaire. Les principales propriétés des sécantes communes à deux coniques y sont exposées avec soin; il y a de nombreux détails sur les équations des coniques satisfaisant à des conditions particulières et sur les propositions immédiates qui en découlent. Si, à cette nomenclature fort incomplète, on joint un nombre considérable d'exercices (problèmes, questions de concours, courbes à construire, etc.), on voit que le Traité de M. Painvin fournit aux élèves de Mathématiques spéciales toutes les ressources nécessaires pour étudier très-sérieusement la Géométrie analytique et pour se mettre en garde contre les éventualités des examens.

Mais tout ceci n'est que la moitié de l'Ouvrage dont nous essayons de donner une idée : l'Auteur a voulu, en outre, mettre entre les mains de ses lecteurs tous les instruments que possède l'analyse algébrique pour l'étude de la Géométrie.

A cet effet, il donne la théorie complète des coordonnées tri-

latères et des coordonnées tangentielles. Jusqu'à présent on ne rencontrait l'emploi systématique des équations tangentielles que dans quelques ouvrages allemands; d'ailleurs, pour rester d'accord avec nos méthodes d'enseignement, M. Painvin a dû abandonner, comme il le déclare dans son Avertissement, la marche suivie par les auteurs allemands. Pour rendre plus complète la corrélation des coordonnées *tangentielles* et des coordonnées *ponctuelles*, M. Painvin a introduit la notation des polaires d'une droite; cette théorie importante avait été déjà présentée par l'Auteur au Comité des Sociétés savantes en 1861.

On remarquera encore, dans ce volumineux Ouvrage, les principes de la transformation des figures, l'involution, la théorie des caractéristiques : toutes ces questions sont traitées au point de vue de la Géométrie analytique.

Le Traité de M. Painvin forme donc un ensemble très-complet et répondant à un double besoin de nos élèves de Spéciales : il les prépare sérieusement aux examens des Écoles et fournit un aliment à leur légitime curiosité scientifique.

Nous ne pouvons donc que désirer vivement la publication de la *Géométrie analytique* à trois dimensions, et cela avec d'autant plus de raison que l'Auteur nous promet, dans son Avertissement, quelques notions élémentaires sur les déterminants, sur l'application à la géométrie de la théorie des invariants et des covariants, car ces notions, si succinctes qu'elles soient, offriront toujours de l'intérêt aux élèves de Mathématiques spéciales.

Un Abonné.

QUESTION.

894. Étant donné, sur un plan P, un triangle quelconque ABC, construire avec la règle et le compas le côté du triangle équilatéral dont ABC est la projection sur le plan P.

(Lionnet.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1868).

Composition mathématique.

Soient deux paraboles P_1, P_2 ayant toutes deux pour foyer le point fixe O, et pour axes respectifs les deux droites fixes OX, OY perpendiculaires l'une sur l'autre : menons à ces deux courbes une tangente commune qui touche P_1 en M_1, et P_2 en M_2 ; prenons le milieu M de la portion de droite M_1M_2.

On demande le lieu du point M lorsque les paramètres des paraboles varient de manière que la tangente commune M_1M_2 passe toujours par un point fixe A.

Composition de trigonométrie.

Étant donnés dans un triangle rectiligne deux côtés et l'angle qu'ils comprennent, savoir :

$$a = 25\,824^{m},52$$
$$b = 15\,642^{m},34$$
$$C = 84^{\circ}32'18'',4$$

calculer les deux autres angles A, B, et le troisième côté c.

Composition de géométrie descriptive.

On demande de représenter par ses projections le corps engendré par un triangle équilatéral qui tourne autour d'un de ses côtés.

On construira directement les lignes de contour apparent, sur le plan horizontal, des surfaces coniques qui

terminent ce corps. Ces droites serviront à tracer avec plus d'exactitude la projection de la circonférence décrite par le sommet opposé au côté qui sert d'axe de révolution.

Ce côté est projeté en $(a'b', ab)$. Pour déterminer les points a, a', b, b', on donne les dimensions suivantes :

$pq = 7$ centimètres.
$a'p = 14$ »
$b'q = 10$ »
$ap = 15$ »
$bq = 5$ »

On prendra la ligne de terre parallèlement aux petits côtés de la feuille de dessin et à égale distance de ces côtés.

Nota. — Pour construire les deux ellipses sur le plan horizontal et sur le plan vertical, on les considérera comme étant les projections d'un cercle de rayon connu, tracé dans un plan donné.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE (ANNÉE 1868.)

Composition de mathématiques.

On donne une ellipse et un point P situé dans le plan de la courbe. Déterminer le lieu des sommets des cônes qui ont pour directrice l'ellipse, et dont l'un des trois axes de symétrie passe par le point P.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE (ANNÉE 1868).

Composition en mathématiques.

La somme de deux nombres est A, la somme de leurs cubes est B; déterminer ces nombres et discuter la solution du problème.

En supposant le nombre A égal à $\sqrt{2}$, et le nombre B égal à $\sqrt{5}$, on déterminera à un dix-millième près la valeur de chacun des deux nombres cherchés : 1° sans le secours des tables de logarithmes et en faisant usage du plus petit nombre possible de décimales; 2° avec l'aide des tables de logarithmes.

(Durée de la séance, 3 heures.)

Composition en trigonométrie et calcul logarithmique.

Dans un triangle, un côté a $187^{m},1215$; un autre $95^{m},1478$; l'angle compris entre ces deux côtés est de $70°47'25'',4$. On demande : 1° les deux autres angles de ce triangle; 2° son troisième côté; 3° la surface; 4° le rayon du cercle inscrit; 5° la distance du centre du cercle inscrit à chacun des trois sommets.

Les longueurs et la surface sont déterminées avec sept figures, et les angles à un dixième de seconde près.

(Durée de la séance, 3 heures.)

RÉCIPROQUE D'UNE PROPOSITION
Sur les coniques homothétiques qui ont le même centre ;

PAR M. E. BARBIER.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 907.

1. *Si deux courbes sont telles, que toute sécante donne deux segments égaux, compris l'un et l'autre entre les deux courbes, les courbes ne sont autres que deux coniques homothétiques.* M. J. Bertrand, après avoir mis en évidence le défaut d'une prétendue démonstration de cette proposition, la démontra, dans le *Journal de M. Liouville,* dans le cas de deux courbes infiniment voisines; nous pouvons démontrer la proposition en général, comme on va le voir dans cette Note.

2. *Lemme.* — Si l'on peut démontrer qu'une courbe est telle, qu'en prenant à volonté deux points sur cette courbe, on puisse faire passer une conique doublement osculatrice à la courbe en ces deux points, la courbe ne peut être qu'une conique qui se confond avec toute conique doublement osculatrice qu'on lui mènerait.

Pour démontrer cette proposition, rappelons-nous : 1° que M. Bertrand a démontré que les coniques sont les seules courbes dont toutes les lignes diamétrales sont droites; 2° qu'il n'y a pas de courbe qui, en un point quelconque, ait avec la tangente au même point un contact d'ordre supérieur au premier.

Au milieu de la droite qui joint les points d'osculation de deux courbes doublement osculatrices, les lignes diamétrales conjuguées à la direction de la droite sont oscu-

latrices; si l'une des deux courbes est une conique, on peut donc dire qu'au milieu de la ligne droite, qui joint les deux points d'osculation, la ligne diamétrale correspondante est une osculatrice à sa tangente.

Le lemme se démontre maintenant ainsi : La courbe dont il s'agit a des lignes diamétrales continuellement osculatrices à ses tangentes, c'est-à-dire des lignes droites diamétrales; en vertu de la proposition démontrée par M. Bertrand, la courbe, ayant des lignes droites pour lignes diamétrales conjuguées à une direction quelconque, ne peut être qu'une conique : le lemme s'ensuit.

3. Le lemme qui vient d'être posé nous permet de réduire la démonstration de notre proposition à la démonstration de celle-ci : Si deux courbes sont telles, que toute sécante donne deux segments égaux, compris l'un et l'autre entre les deux courbes, on peut mener une conique doublement osculatrice en deux points pris à volonté sur l'une des courbes.

Soient B et C deux points pris sur l'une des courbes : la corde BC *prolongée* coupe l'autre courbe aux points A et D, on a $AB = CD$. Nous pouvons considérer une première conique ayant deux points infiniment voisins du point B, communs avec la première courbe, et trois points infiniment voisins du point C, communs avec cette même courbe, puis faire passer par le point A une seconde conique concentrique et homothétique à la première; elle passera par le point D, à cause de $AB = CD$.

Une sécante faisant avec la ligne droite ABCD un angle infiniment petit du premier ordre donnerait, dans le système des deux courbes,

$$A'B' = C'D',$$

et dans le système des deux coniques,

$$A''B'' = C''D'',$$

d'où, par soustraction, l'équation

$$A'A'' - B'B'' = C'C'' - D'D'',$$

dans laquelle $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ sont des quantités infiniment petites.

Or, nous allons supposer qu'il n'y ait que deux points infiniment voisins réunis au point B et trois points réunis au point C, et réduire à l'impossible cette supposition ; nous l'abandonnerons alors, et remarquant que nous pouvons astreindre notre première conique à ces cinq conditions, nous serons conduits à la supposition de l'énoncé, à savoir : que cette conique, déterminée par le contact et par l'osculation d'une courbe en des points donnés B et C, est, par cela même, doublement osculatrice à cette courbe.

4. Réduisons à l'absurde l'hypothèse d'un contact en A et d'une osculation en C, par le moyen de l'équation

$$A'A'' - B'B'' = C'C'' - D'D'',$$

où l'on peut supposer l'une des quantités nulles, en faisant passer la sécante $A'B'C'D'$ par l'un des points A, B, C, ou D :

1° Si $A'B'C'D'$ passe au point A, $A'A'' = 0$, et comme $C'C''$ est d'ordre supérieur à $B'B''$, on en conclut que $B'B''$ et $D'D''$ sont de même ordre et de même signe ; il y a donc un simple contact en D comme en B, et le sens du contact est le même en ces deux points.

2° Si $A'B'C'D'$ passe au point D, on conclut que $A'A''$ et $B'B''$ sont de même ordre infinitésimal et de même signe, et, par suite, qu'en A, comme en B, il y a un simple contact, le sens du contact étant le même en ces deux points.

Notre hypothèse nous amène donc à affirmer hypothé-

tiquement, qu'en A et en D la seconde conique est tangente à la seconde courbe, dans un même sens, qui est le même que le sens du contact de la première conique et de la première courbe au point B.

3° Si $A'B'C'D'$ passe au point B, nous devons admettre que $A'A''$ et $D'D''$ sont de signes contraires; les contacts en A et en D n'ont donc pas le même sens, ce qui contredit une conclusion précédente.

L'hypothèse d'un contact simple en B et d'une osculation en C ne se soutient pas; nous devons l'abandonner, ainsi que nous l'avons annoncé, pour adopter qu'en deux points pris sur la première courbe, il y a une conique doublement osculatrice à cette courbe; en vertu de notre lemme, cette première courbe n'est autre qu'une conique, et, par suite, la première courbe se confond avec une conique homothétique à la première.

5. Nous pouvons donc affirmer qu'il n'y a que la couche ellipsoïdale, considérée dans la question de l'attraction des ellipsoïdes, qui prenne deux segments égaux de toute sécante qui la traverse.

En effet, toutes les sections planes pourraient être soumises à notre démonstration, et l'on sait, d'ailleurs, qu'il n'y a que les surfaces du second degré dont toutes les sections planes soient des coniques.

6. Pour terminer, nous indiquerons la démonstration qu'on peut donner de cette proposition : Il n'y a que les coniques dont toutes les lignes diamétrales soient droites.

En effet, dans une courbe, on peut inscrire une ligne brisée ABCDEFGHI..., dont les côtés soient alternativement parallèles à deux directions données; cette construction donnera autant de points que l'on voudra, et ces points seront aussi voisins que l'on voudra, si l'angle des deux directions est infiniment petit; or, il est facile de

montrer que la conique déterminée par les cinq points A, B, C, D, E passe par les points obtenus en continuant la construction; donc la courbe n'est autre qu'une conique.

REMARQUES SUR LES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. L.-V. TURQUAN.

Carnot, dans sa *Géométrie de position*, rappelle plusieurs objections faites par d'Alembert à la théorie des quantités négatives, et il cite à l'appui la résolution du problème suivant :

« Du point K pris hors d'un cercle donné (*), soit proposé de mener une droite Kmm' telle, que la portion mm', interceptée dans le cercle, soit égale à une droite donnée.

» Du point K et par le centre du cercle, menons une droite KAB, qui rencontre la circonférence en A et B. Supposons

$$\mathrm{KA} = a \quad \text{et} \quad \mathrm{KB} = b, \quad mm' = c, \quad \mathrm{K}m = x:$$

on aura, par les propriétés du cercle,

$$ab = x(c + x) = cx + x^2,$$

donc

$$x^2 + cx - ab = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}.$$

» x a donc deux valeurs : la première, qui est positive, satisfait sans difficulté à la question; mais que si-

---

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

gnifie la seconde, qui est négative? Il paraît qu'elle ne peut répondre qu'au point m', qui est le second de ceux où Km coupe la circonférence; et en effet, si l'on cherche directement Km', en prenant cette droite pour l'inconnue x, on aura

$$x(x-c)=ab \quad \text{ou} \quad x=\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab};$$

donc la valeur positive est précisément la même que celle qui s'était présentée dans le premier cas avec le signe négatif. Donc, quoique les deux racines de l'équation

$$x=-\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}c^2+ab}$$

soient l'une positive, l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K. Ainsi la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposés porte à faux. Si au contraire le point fixe K était pris sur le diamètre même AB et non sur le prolongement, on trouverait pour x deux valeurs positives, et cependant elles devraient être prises en sens contraire l'une de l'autre. La règle est donc encore fausse pour ce cas. »

Tel est le texte de Carnot.

Pour répondre à ces objections, je remarquerai que ab est non-seulement le produit de KA par KB, mais encore celui de — KA par — KB, de sorte que si l'on prend à gauche de K, sur la droite AB, une longueur KA$'$ = KA et KB$'$ = KB, et que sur A$'$B$'$ comme diamètre on décrive une circonférence, les deux équations

$$x^2+cx+ab=0 \quad \text{et} \quad x^2-cx-ab=0,$$

et les valeurs d'x fournies par chacune d'elles se rapportent tout aussi bien au cercle A$'$B$'$ qu'au cercle AB. De

sorte qu'après avoir déterminé le point m sur la circonférence AB au moyen de la valeur positive de x donnée par $x^2 + cx - ab = 0$ et tiré Km, si l'on prolonge Km au delà de K jusqu'à la rencontre du cercle A'B' en M', la droite KM' sera la valeur négative de x donnée par la même équation.

Et l'on peut dire que, si du point K comme centre, avec un rayon Km égal à l'une des valeurs positives de x, on décrit une circonférence, on déterminera sur les circonférences AB et A'B' quatre points m, n, M, N, et qu'en joignant le point K à ces quatre points, on aura toutes les droites qui résolvent le problème.

De même si du point K comme centre, avec un rayon égal à la valeur négative —KM', on décrit une circonférence, on déterminera sur les deux circonférences AB et A'B' quatre points m', n', M', N', et en joignant le point K à ces quatre points, on aura encore toutes les droites qui résolvent la question.

Et ces droites, qu'on les obtienne avec l'un ou l'autre rayon, sont deux à deux égales et de signes contraires.

Si le point K était donné dans l'intérieur du cercle, entre A et B, on construirait encore le cercle A'B'. Dans le cercle AB, AK sera négative et égale à $-a$, et BK positive et égale à b ; et dans le cercle A'B', A'K serait positive et égale à a, B'K négative et égale à $-b$. En introduisant cette circonstance dans les équations du cas précédent, les équations deviendraient

$$x^2 + cx + ab = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - cx + ab = 0.$$

Et ces équations se rapportent toutes deux à l'un et à l'autre des cercles AB et A'B'.

Et l'on construirait toutes les solutions relatives à l'un et à l'autre cercle, comme on l'a fait pour le premier cas.

La seule différence qu'il y ait entre ce cas et le précé-

dent, c'est que les solutions négatives sont fournies par les mêmes équations, et que cela a lieu aussi pour les solutions positives.

Les objections de d'Alembert et de Carnot portaient donc à faux. Elles provenaient de ce que l'on restreignait la généralité du problème, en supposant que les équations obtenues ne convenaient qu'à un seul cercle, tandis qu'elles conviennent en réalité à deux cercles égaux et symétriquement placés par rapport au point K.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 61

(voir 1re série, t. II, p. 48);

PAR M. G. BATTAGLINI.

Deux pyramides convexes qui ont les faces triangulaires égales chacune à chacune et semblablement disposées sont égales. (CATALAN.)

M. Battaglini énonce le théorème sous la forme suivante : *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont leurs arêtes respectivement égales et semblablement placées.*

Voici comment il le démontre.

Abaissons les hauteurs SO, S'O' (*); si nous admettons qu'elles sont égales, toutes les lignes AO, BO,...,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

KO, LO, . . . seront respectivement égales à leurs correspondantes dans l'autre pyramide; les triangles ayant leurs sommets en O seront par conséquent égaux aux triangles ayant leurs sommets en O'; donc les deux pyramide seront égales, car on pourra les superposer. Donc tout revient à prouver l'égalité des deux hauteurs.

Admettons que les hauteurs diffèrent et posons

$$\overline{SO}^2 = \overline{S'O'}^2 + m^2,$$

m étant une certaine ligne; portons cette ligne à partir de O sur la hauteur OS, et soit

$$OM = m.$$

En nommant A, B. . . K, L les divers sommets de la première base, et A', B'. . . K', L' les sommets homologues de la seconde, nous avons, d'après nos diverses hypothèses,

$$\overline{SA}^2 = \overline{S'A'}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{AO}^2 = \overline{S'O'}^2 + \overline{A'O'}^2,$$

donc

$$\begin{aligned} m^2 = \overline{SO}^2 - \overline{S'O'}^2 &= \overline{A'O'}^2 - \overline{AO}^2, \\ &= \overline{B'O'}^2 - \overline{BO}^2, \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \overline{K'O'}^2 - \overline{KO}^2, \\ &= \overline{L'O'}^2 - \overline{LO}^2; \end{aligned}$$

mais on a aussi

$$\begin{aligned} \overline{AM}^2 &= \overline{AO}^2 + m^2 = \overline{A'O'}^2, \\ \overline{BM}^2 &= \overline{BO}^2 + m^2 = \overline{B'O'}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} AM &= A'O', \\ BM &= B'O', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$KM = K'O',$$
$$LM = L'O'.$$

Par conséquent les triangles ayant leurs sommets en M sont respectivement égaux aux triangles ayant leurs sommets en O', ce qui est absurde, puisque autour de O' les triangles sont dans un même plan, tandis que autour de M ils forment un angle solide.

Cette absurdité cesse si M se confond avec le point O, et alors $m = 0$, donc

$$SO = S'O'.$$

Question 342

(voir tome XV, page 353);

PAR M. BAUQUENNE.

ABC est un triangle inscrit dans le triangle abc, A est sur bc, B sur ac, C sur ab; trois courbes sont données dans le même plan; AB touche une courbe en γ, AC touche une deuxième courbe en β et BC la troisième courbe en α: on a, pour toute position du triangle ABC,

$$\frac{A\gamma . B\alpha . C\beta}{A\beta . B\gamma . C\alpha} = \frac{aC . bA . cB}{aB . bC . cA} \quad \text{(Möbius)}.$$

Soient O le point de contact d'une droite mobile avec son enveloppe, M et M' ses points de rencontre avec deux courbes données, MA et M'A les tangentes à ces courbes; en considérant la position infiniment voisine de la droite mobile comme une transversale coupant les trois côtés du triangle AMM', on a

$$OM' . AM' . ds = OM . AM . ds',$$

ds et ds' étant les arcs décrits par les points M et M' (Bour,

Cinématique, p. 58). Écrivons que cette relation a lieu pour chacun des côtés du triangle ABC, nous aurons

$$B\gamma . cB . ds = A\gamma . cA . ds',$$
$$C\alpha . aC . ds' = B\alpha . aB . ds'',$$
$$A\beta . bA . ds'' = C\beta . bC . ds,$$

et, en multipliant membre à membre,

$$A\beta . B\gamma . C\alpha . aC . bA . cB = A\gamma . B\alpha . C\beta . aB . bC . cA,$$

ou

$$\frac{A\gamma . B\alpha . C\beta}{A\beta . B\gamma . C\alpha} = \frac{aC . bA . cB}{aB . bC . cA} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 711

(voir 2e série, t. III, p. 448);

PAR M. LAISANT,
Officier du génie.

Les sommets d'un polygone étant aux points a, b, c, d,..., menons, par un point arbitraire o, des parallèles aux côtés de l'angle a, et désignons par A *la surface du parallélogramme ainsi construit. Soient* B, C, D,... *les surfaces des parallélogrammes déterminés de la même manière aux sommets b, c, d,.... Démontrer que le point o est le centre de gravité des poids* $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$,... *placés aux sommets a, b, c,....*

Il y a un théorème correspondant dans l'espace.

(H. FAURE.)

Considérons deux sommets consécutifs a, b; construisons les parallélogrammes indiqués et prolongeons, en

les doublant, leurs côtés oa_1, oa_2, ob_1, ob_2 en $o\alpha_1$, $o\alpha_2$, $o6_1$, $o6_2$ (*). Il est clair que les points α_1, a, α_2 sont en ligne droite, et que $a\alpha_1 = a\alpha_2$. Donc on peut remplacer le poids $\frac{1}{A}$, placé en a, par deux poids $\frac{1}{2A}$ placés, l'un en α_1, l'autre en α_2. De même pour le poids $\frac{1}{B}$. Composons maintenant les poids $\frac{1}{2A}$, $\frac{1}{2B}$ appliqués en α_1 et 6_1 sur la droite $\alpha_1 6_1$ parallèle à ab. La résultante passera par le point o. En effet, on a

$$\frac{o\alpha_1}{o6_1} = \frac{oa_1}{ob_1} = \frac{A}{B} = \frac{\left(\frac{1}{B}\right)}{\left(\frac{1}{A}\right)},$$

puisque les parallélogrammes A, B, ayant même hauteur, sont entre eux comme leurs bases oa_1, ob_1. Les compositions partielles analogues donneront des résultantes passant par le point o; donc ce point est le centre de gravité du système.

Cette démonstration suppose que l'on considère comme positives les surfaces des parallélogrammes qui se forment au moyen des angles mêmes du polygone, et comme négatives les surfaces des parallélogrammes qui se forment au moyen des angles supplémentaires.

Note du Rédacteur. — En généralisant ce théorème, M. Laisant établit la proposition suivante : *Les sommets d'un polyèdre étant aux points a, b, c,...; menons par un point arbitraire* O *des plans parallèles aux faces de*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Les côtés de l'angle a étant représentés par ab, ac, les droites oa_1, oa_2 sont parallèles à ab, ac, et rencontrent ac, ab en a_1, a_2. Le parallélogramme A est oa_1aa_2. Les droites $o\alpha_1$, $o\alpha_2$ sont doubles de oa_1, oa_2. Les côtés de l'angle b étant représentés par ba, bd, les droites ob_1, ob_2 sont parallèles à ba, bd et rencontrent bd, ba en b_1, b_2. En outre $o6_2 = 2.ob_2$ et $o6_1 = 2.ob_1$.

l'angle solide a et désignons par A_1, A_2,... *les volumes des différents parallélipipèdes ainsi construits. Soient* B_1, B_2,..., C_1, C_2,..., *les volumes des parallélipipèdes déterminés de la même manière aux sommets b, c,...; le point* O *sera le centre de gravité des poids* $\frac{1}{A_1}$, $\frac{1}{A_2}$,..., $\frac{1}{B_1}$, $\frac{1}{B_2}$,..., $\frac{1}{C_1}$, $\frac{1}{C_2}$,..., *placés aux sommets a, b, c....*

Question 836

(voir 2e série, t. VI, p. 526);

PAR M. LÉON BARBIER,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg
(classe de M. Pruvost).

Soient deux surfaces du second ordre S *et* T, ABCD *le tétraèdre conjugué par rapport à ces deux surfaces, et* Γ *la courbe gauche d'intersection de* S *et* T. *Les plans polaires d'un point* P, *par rapport aux diverses surfaces du second ordre passant par la courbe* Γ, *tournent autour d'une droite* Δ; *les plans menés par la droite* Δ *et les sommets du tétraèdre* ABCD *forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant, quel que soit le point considéré* P.

Plus particulièrement, les plans menés par une tangente quelconque à la courbe gauche Γ *par les sommets du tétraèdre* ABCD *forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant.* (PAINVIN.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ les équations des faces du tétraèdre ABCD. Les surfaces S et T ont respectivement pour équations

$$S = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0,$$
$$T = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 = 0.$$

Les plans polaires du point $P(\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, \delta_1)$ par rapport

aux surfaces S et T ont pour équations

$$s = A\alpha_1\alpha + B\beta_1\beta + C\gamma_1\gamma + D\delta_1\delta = 0,$$
$$t = a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma + d\delta_1\delta = 0.$$

Maintenant l'équation

$$S + \lambda T = 0$$

représente une surface quelconque du second ordre passant par l'intersection des surfaces S et T, par suite

$$s + \lambda t = 0$$

représente le plan polaire du point P par rapport à cette surface; donc ce plan polaire passe par la droite fixe Δ, intersection des plans représentés par les équations $s = 0$, $t = 0$.

Les équations

$$s + K_0 t = 0,$$
$$s + K_1 t = 0,$$
$$s + K_2 t = 0,$$
$$s + K_3 t = 0$$

représentent quatre plans passant par la droite Δ. Ces plans passeront respectivement par les quatre sommets du tétraèdre, si l'on a les relations

$$A + K_0 a = 0,$$
$$B + K_1 b = 0,$$
$$C + K_2 c = 0,$$
$$D + K_3 d = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre plans déterminés par la droite Δ et les quatre sommets du tétraèdre est

$$\frac{K_0 - K_2}{K_1 - K_2} : \frac{K_0 - K_3}{K_1 - K_3} = \frac{-\frac{A}{a} + \frac{C}{c}}{-\frac{B}{b} + \frac{C}{c}} : \frac{-\frac{A}{a} + \frac{D}{d}}{-\frac{B}{b} + \frac{D}{d}},$$

quantité indépendante des coordonnées du point P.

Si le point P est sur la courbe Γ, la droite Δ est la tangente en ce point à la courbe. Le cas particulier de l'énoncé est ainsi établi.

Note. — M. Joanne a résolu la même question à peu près de la même manière.

Question 840

(voir 2e série, t. VII, p. 44);

PAR M. MORGES,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Darboux).

On donne un cercle et un point O *fixe sur la circonférence, par ce point on mène une corde arbitraire* OM, *sur la direction de laquelle on porte une longueur* OP *telle, que* $\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \text{const.}$; *par le point* P *on mène une perpendiculaire à* OP, *trouver l'enveloppe de cette perpendiculaire.* (DUPAIN.)

La relation

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \text{const.}$$

peut s'écrire

$$(OP - OM)(OP + OM) = \text{const.},$$

ou bien

$$PM(PM + 2OM) = \text{const.}$$

Menons le diamètre du point O, soit OF (*); et de l'extrémité F abaissons une perpendiculaire sur la ligne dont nous cherchons l'enveloppe, soit FH, nous voyons que FH = PM. D'un autre côté, si sur le prolongement de FO nous prenons OF' = FO, et si du point F' nous abaissons sur PH une perpendiculaire F'H', nous aurons en-

---

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

core

$$PM + 2OM = F'H';$$

donc la relation donnée équivaut à

$$FH \times F'H' = \text{const.}$$

Donc, d'après un théorème connu, la droite HH′ enveloppe une ellipse ou une hyperbole suivant le signe de la constante; F, F′ sont les foyers de cette conique, et O est son centre. La constante représente le carré du petit axe, ou le carré de l'axe imaginaire.

Note. — On peut remarquer, avec M. Laisant, que

$$\overline{OH}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MF}^2 = \overline{OF}^2 + \text{const.} = \text{const.}$$

Donc le lieu des points H est un cercle de centre O; donc la podaire de l'enveloppe cherchée est circulaire, si l'on prend le point F comme pôle; donc cette enveloppe est bien une ellipse ou une hyperbole.

Ont résolu la même question : MM. Laisant, capitaine du génie; Georges de Villepin, du collège Stanislas (classe de M. Gros); Arthur Millasseau, du lycée de Douai (classe de M. Painvin); Caron et Floquet, du lycée de Nancy (classe de M. Vaille); A. Collin, maître répétiteur au lycée de Mâcon; Paul Vasseur, du lycée d'Amiens; E. Lattes et G. Lecœur, du lycée de Rouen (classe de M. Vincent); Kaber Bey; Jouanne; Léon Arnoye, du lycée Charlemagne; Auguste Clair, du lycée de Dijon (classe de M. Marguet); A. Romieux, du lycée Saint-Louis; Julien Boulanger, du lycée de Dijon; A. Hilaire; G. Herment et Julien Welsch, du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

La plupart de ces solutions consistent dans la détermination directe de l'enveloppe par le calcul.

Question 856

(voir 2e série, t. VII, p. 189);

PAR M. ALFRED GIARD.

Soient M *et* M_1 *deux points d'une ellipse tels, que les produits des coefficients angulaires des diamètres passant par ces points soient* $-\frac{b^2}{a^2}$. *En nommant* ρ, ρ_1 *les rayons de courbure en ces points,* r, r_1 *les rayons de courbure de la développée aux points correspondants à ceux de l'ellipse, on a les deux relations*

$$\rho\rho_1 = ab, \quad \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3.$$

(A. SARTIAUX.)

Nommons φ et φ_1 les paramètres angulaires des extrémités de deux diamètres, les coordonnées de ces points seront

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi = am, \\ y = b\sin\varphi = bn; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = a\cos\varphi_1 = am_1, \\ y_1 = b\sin\varphi_1 = bn_1, \end{cases}$$

en posant

$$\cos\varphi = m,$$

$$\sin\varphi = n,$$

pour abréger.

Les coefficients angulaires des diamètres sont liés, en vertu de l'énoncé, par la relation

$$\frac{n_1 n}{m_1 m} = -\frac{b}{a}.$$

D'un autre côté, les rayons de courbure aux points (1)

et (2) sont

$$\rho = \frac{(a^2n^2 + b^2m^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \quad \rho_1 = \frac{(a^2n_1^2 + b^2m_1^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

donc

$$\rho\rho_1 = \frac{[a^4n^2n_1^2 + a^2b^2(n^2m_1^2 + m^2n_1^2) + b^4m^2m_1^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2},$$

mais

$$a^2n^2n_1^2 = b^2m^2m_1^2,$$

donc

$$\rho\rho_1 = ab\,(n^2n_1^2 + n^2m_1^2 + m^2n_1^2 + m^2m_1^2) = ab.$$

Les coordonnées des points de la développée correspondant aux points (1) et (2) de l'ellipse sont

$$(3)\quad \begin{cases} X = \dfrac{c^2}{a}\, m^3, \\ Y = -\dfrac{c^2}{b}\, n^3; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{c^2}{a}\, m_1^3, \\ Y_1 = -\dfrac{c^2}{b}\, n_1^3. \end{cases}$$

En appliquant la formule connue du rayon de courbure

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

on trouve, pour les points (3) et (4) de la développée, après quelques réductions,

$$r = \frac{3c^2\rho mn}{ab}, \quad r_1 = \frac{3c^2\rho_1 m_1 n_1}{ab},$$

donc

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\rho_1}{\rho}\,\frac{m_1 n_1}{mn};$$

d'un autre côté

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2 = \frac{(a^2n_1^2 + b^2m_1^2)^3}{(a^2n^2 + b^2m^2)^3},$$

donc

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^4 = \left(\frac{m_1^4 n_1^4}{m^4 n^4}\right)^3 \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_1}{\rho} = \left(\frac{m_1 n_1}{mn}\right)^3,$$

toutes réductions faites.

Donc enfin, en remplaçant dans l'égalité ci-dessus $\frac{m_1 n_1}{mn}$ par la valeur que donne cette dernière équation :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

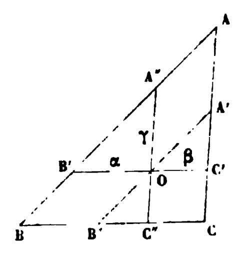
Note. — La question a été résolue de la même manière par MM. P. Willière, Kaher Bey, Jouanne. MM. Pierre Sondat, au collége d'Annecy, et M. Brocard, sous-lieutenant du génie, ont évité l'emploi de l'angle auxiliaire φ.

Question 863

(voir 2e série, t. VII, p. 191) ;

PAR M. ALBERT AUBANEL,
Élève de Mathématiques élémentaires au lycée de Nimes.

Construire un triangle, connaissant les trois parallèles aux trois côtés qui passent par le centre du cercle inscrit. (LEMOINE.)



Le quadrilatère BB′OB″ est un losange.

En effet, ce quadrilatère est un parallélogramme dans lequel une diagonale BO est bissectrice de l'angle au sommet B correspondant. De même AA'A''O est un losange, ainsi que OC'CC''.

Donc, parmi les six segments déterminés par le centre sur les trois parallèles, *trois seulement sont différents*.

Je désigne par α et β les deux segments comptés sur l'une des parallèles, et par γ le troisième segment; par m, m', m'' les longueurs données de ces parallèles.

On a

$$\alpha + \beta = m,$$
$$\alpha + \gamma = m',$$
$$\beta + \gamma = m'',$$

d'où l'on tire immédiatement la valeur de chaque segment α, β et γ.

On peut donc se donner l'une des parallèles et déterminer sur elle la position du centre O.

Dès lors le problème est bien facile à résoudre, car les deux triangles A''OB', A'OC' sont semblables et fournissent la relation suivante :

$$\frac{A''B'}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{A'C'},$$

d'où

$$A''B' = \frac{\gamma\alpha}{\beta}, \quad A'C' = \frac{\beta\gamma}{\alpha}.$$

On peut donc trouver la position des points A'' et A' par la construction des deux triangles A''OB', A'C'O, et le triangle demandé est aussitôt déterminé.

Remarquons que l'on peut se poser une question analogue en se donnant le centre de l'un des cercles ex-inscrits. Les trois équations donnant α, β et γ de-

viennent

$$\alpha + \beta = m,$$
$$\beta - \alpha = m',$$
$$\beta - \gamma = m'',$$

et les deux triangles semblables subsistent toujours.

Note. — Ont résolu la question de la même manière : MM. Racine, élève de Mathématiques élémentaires au lycée de Poitiers; P. Willière; Gayou, élève à l'École Normale supérieure.

QUESTION DE LICENCE.

Faculté des Sciences de Paris, 7 juillet 1868.

SOLUTION DE M. LUIS FERNANDEZ Y PASALAGUA.

Déterminer tous les conoïdes droits tels, qu'en chacun de leurs points les rayons de courbure des deux sections principales de la surface soient égaux et dirigés en sens contraires. On indiquera ensuite comment varie, sur les surfaces obtenues, la valeur absolue du rayon de courbure commun aux deux sections principales, quand on se déplace sur l'une des génératrices.

L'équation qui donne les rayons de courbure des deux sections principales d'une surface quelconque est, comme on sait,

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} (rt - s^2)\rho^2 - \sqrt{1+p^2+q^2} \\ \quad \times[(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\rho + (1+p^2+q^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Les deux racines de cette équation devant être égales et de signes contraires,

$$\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r] = 0.$$

Négligeant la solution $1+p^2+q^2=0$, qui donne, comme on sait, des surfaces imaginaires, il reste

$$(2)\qquad (1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r=0.$$

D'autre part, l'équation générale des conoïdes droits est, en prenant la directrice pour axe des z et le plan directeur pour plan des xy,

$$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

On en déduit, par l'élimination de la fonction arbitraire,

$$(3)\qquad px+qy=0.$$

Différentions cette équation successivement par rapport à x et par rapport à y :

$$(4)\qquad rx+p+sy=0,$$
$$(5)\qquad ty+q+sx=0.$$

De ces deux dernières équations, on tire

$$(6)\qquad (rq-ps)x+(sq-pt)y=0.$$

L'équation (2) se réduit alors, en tenant compte de l'équation (3) et de l'équation (6), à

$$(7)\qquad r+t=0.$$

Des équations (4) et (5) on tire encore

$$r=-\frac{p+sy}{x},\quad t=-\frac{q+sx}{y};$$

donc

$$rt-s^2=\frac{(p+sy)(q+sx)}{xy}-s^2=\frac{pq}{xy},$$

et l'équation (1) se réduit alors à

$$(8)\qquad pq\rho^2+xy(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Prenons maintenant $\frac{y}{x}$ pour variable indépendante, et appelons-la u :

$$\frac{y}{x}=u,\quad p=-\frac{dz}{du}\frac{y}{x^2},\quad q=\frac{dz}{du}\frac{1}{x},$$

$$r=\frac{d^2z}{du^2}\frac{y^2}{x^4}+\frac{2y}{x^3}\frac{dz}{du},\quad t=\frac{d^2z}{du^2}\frac{1}{x^2}.$$

Portons ces valeurs dans les équations (7) et (8) ; elles deviennent alors

(9) $$\frac{dz^2}{du^2}\frac{y}{x^3}\rho^2=xy\left[1+\frac{dz^2}{du^2}\frac{1}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\right]^2,$$

(10) $$\frac{d^2z}{du^2}\frac{y^2}{x^4}+\frac{d^2z}{du^2}\frac{1}{x^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{dz}{du}=0.$$

Négligeant la solution singulière de cette dernière $x=0$, qui correspond à un plan, elle devient

$$\frac{\frac{d^2z}{du^2}}{\frac{dz}{du}}=\frac{-2u}{1+u^2};$$

donc

$$\frac{dz}{du}=\frac{C}{1+u^2},$$

et

(11) $$z=C\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

C'est l'équation de l'héliçoïde gauche.

L'équation (9) devient

(12) $$\rho=1+\frac{x^2+y^2}{C^2}.$$

Nous voyons par là que, si nous nous déplaçons sur une génératrice, en partant de la directrice, le rayon de courbure varie de ± 1 à $\pm\infty$.

SUR LA CONSTRUCTION DES AXES D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. H. PICQUET,
Sous-lieutenant élève du génie.

1. Dans le numéro du mois d'août des *Nouvelles Annales*, M. P. Serret a donné la construction des axes d'une surface du second degré. Nous allons en donner une qui, comme la sienne, se ramène à la recherche du triangle conjugué commun à deux coniques, mais dont la démonstration, croyons-nous, est plus susceptible de faire partie d'une *théorie géométrique* des surfaces du second degré.

On sait qu'en adoptant une dénomination donnée par M. Poudra, l'involution plane se compose d'une série de points conjugués trois à trois, qui sont les traces sur un plan des arêtes d'une série correspondante de trièdres trirectangles ayant même sommet. Il est facile de voir que tous les triangles dont elle se compose sont conjugués par rapport à un cercle imaginaire ayant pour centre la projection du sommet sur le plan et pour rayon imaginaire la longueur de la projetante de ce sommet. On peut alors, en généralisant, dire que l'involution plane est la série des points conjugués trois à trois qui sont les sommets de tous les triangles conjugués par rapport à un même cercle réel ou imaginaire. Lorsque le cercle est réel, un point quelconque du cercle est un point triple, et alors le sommet de l'involution est imaginaire, comme nous venons de le voir; le centre du cercle est le centre de l'involution; enfin l'analogie est parfaite avec l'invo-

lution linéaire; seulement elle se perspective sur un plan quelconque, suivant la série des triangles conjugués à une même conique.

Cela posé, il est facile de démontrer *géométriquement* que les traces de trois diamètres conjugués d'un cône sur un plan quelconque sont les sommets d'un triangle conjugué à la section du cône par le plan. Si donc nous prenons une section circulaire du cône, tous les systèmes de diamètres conjugués du cône détermineront dans son plan une involution plane dont la section du cône sera le cercle triple; si en outre on considère l'involution plane formée dans ce plan par les traces des arêtes de tous les trièdres trirectangles ayant pour sommet le sommet du cône, c'est-à-dire celle qui a pour cercle triple le cercle imaginaire ayant pour centre la projection du sommet du cône et pour rayon imaginaire la longueur de la projetante, les traces des axes du cône sur le plan seront les sommets du triangle commun à ces deux involutions, triangle conjugué commun à leurs cercles triples. Ce triangle ayant un point à l'infini, nous voyons qu'un axe du cône est parallèle aux plans cycliques. Pratiquement, comme on ne connaît pas les directions des sections circulaires de la surface, on devra couper le cône asymptote par un plan quelconque, et rechercher dans ce plan le triangle conjugué commun à la section du cône et à un cercle imaginaire, question élégamment résolue par M. Serret. Quoi qu'il en soit, on voit que l'analogie est parfaite avec la construction des axes d'une conique qui se ramène à celle des rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution linéaire : l'un d'eux est formé par tous les diamètres conjugués de la conique, et l'autre par tous les angles droits qui ont pour sommet le centre de la conique. Ici ce sont les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution plane; l'un d'eux est

formé par les diamètres conjugués de la surface, et l'autre par tous les trièdres trirectangles qui ont pour sommet le centre de la surface.

2. Puisque nous avons parlé de *théorie géométrique*, nous allons faire voir comment on peut démontrer géométriquement la proposition sur laquelle nous nous sommes appuyé. Mais cette démonstration suppose la notion du plan polaire, laquelle s'appuie sur une définition, car toute théorie doit être fondée sur un axiome ou sur une définition.

Nous appellerons donc *surfaces du second degré* toutes les surfaces qu'un plan quelconque coupe suivant une conique : il faut commencer par en démontrer l'existence. Nous remarquerons d'abord que deux coniques situées sur une pareille surface ont nécessairement deux points communs, car, s'il n'en était pas ainsi, le plan de l'une rencontrerait l'autre en deux points situés sur la surface en dehors de la première, ce qui est contraire à la définition.

Supposons donc qu'on nous donne deux coniques de la surface satisfaisant à cette condition : si la surface existe, un point en dehors de ces deux coniques suffira avec elles pour la déterminer, car, en faisant passer un plan quelconque par ce point, il coupera les deux coniques en quatre points, et l'on aura cinq points de l'intersection; lorsque le plan sécant variera en passant par une droite quelconque passant par le point donné, l'intersection engendrera une certaine surface bien définie, et nous allons démontrer qu'un plan quelconque la coupe suivant une conique. Pour cela, supposons que l'on ait construit la section de la surface correspondant à une position du plan sécant; le plan de cette section avec ceux des deux premières forme un trièdre sur chacune des arêtes du-

quel deux des sections viennent se rencontrer en deux points. Soient S le sommet du trièdre, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ les six points situés sur les arêtes (*); nous allons faire voir qu'un plan quelconque ABC coupera ces trois coniques en six points a, a', b, b', c, c' qui sont sur une même conique. Pour cela, considérons la section de la surface par le plan SAB, par exemple, et appliquons-lui par rapport au triangle SAB la relation fournie par le théorème de Carnot, laquelle indique que les six points $\gamma, \delta, \varepsilon, \eta, c, c'$ sont situés sur une même conique. On a alors

$$S\gamma.S\delta.Ac.Ac'.B\varepsilon.B\eta = S\varepsilon.S\eta.Bc.Bc'.A\gamma.A\delta.$$

On aura de même, pour les triangles SAC et SBC par rapport aux coniques situées dans leurs plans respectifs,

$$S\alpha.S\beta.Cb.Cb'.A\gamma.A\delta = S\gamma.S\delta.Ab.Ab'.C\alpha.C\beta,$$
$$S\varepsilon.S\eta.Ba.Ba'.C\alpha.C\beta = S\alpha.S\beta.Ca.Ca'.B\varepsilon.B\eta.$$

Multipliant ces trois équations membre à membre, il vient

$$Ac.Ac'.Cb.Cb'.Ba.Ba' = Bc.Bc'.Ab.Ab'.Ca.Ca',$$

relation qui indique que les six points a, a', b, b', c, c' sont sur une même conique. C'est celle que l'on écrirait si l'on appliquait le théorème de Carnot aux points d'intersection de cette conique et des côtés du triangle ABC.

Si l'on coupe maintenant par un cinquième plan le système de ces quatre coniques, on écrira la relation fournie par le même théorème dans le cas du quadrilatère, laquelle, combinée avec celle du triangle, prouvera que les huit points d'intersection sont sur une même conique, et ainsi de suite. Donc, si pour engendrer la surface on fait passer par le point donné un nombre quelconque de sections planes, ainsi que nous l'avons dit plus haut, et si l'on coupe par un plan quelconque, tous les points d'in-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

tersection du plan avec ces courbes seront sur une même conique, qui sera l'intersection du plan et de la surface. De plus, la surface sera la même, quelle que soit la droite A passant par le point donné, car tous les plans passant par une autre droite B coupent la surface correspondante à la droite A suivant des coniques qui auraient servi à engendrer la surface correspondante à la droite B. Donc, les surfaces du second degré existent telles que nous les avons définies, et nous saurons en construire une, et une seule, toutes les fois que nous en connaîtrons deux sections planes et un point, ou, ce qui revient au même, neuf points, dont cinq soient situés dans un même plan.

Dans le cas où cela n'aurait pas lieu, nous allons seulement indiquer la construction, pour ne pas être trop long. Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les neuf points donnés. On construira les sections du plan passant par la droite 8.9 avec trois surfaces passant par les sept autres points; pour cela, il suffira de se donner à volonté deux points de chacune d'elles situés dans le plan de trois des sept premiers. Par le point 8 et les points de rencontre de ces trois coniques prises deux à deux, on fera passer trois coniques, qui auront, d'après un théorème connu, quatre points communs; par le point 9 et ces quatre points, on fera passer une conique, qui est la section de la surface par le plan considéré. Si l'on veut la section de la surface par un plan quelconque, il suffira de construire ainsi trois sections de la surface dont les intersections avec le plan donné fourniront six points de la section cherchée.

Cette construction est longue, mais n'exige que l'usage de la règle et du compas. Il n'est pas besoin en effet de connaître les points d'intersection de deux coniques pour trouver les points communs à une droite et à une coni-

que passant par ces quatre points et un cinquième point donné.

Maintenant, il est facile de démontrer, en partant de la définition, que le cône circonscrit est du second degré. C'est la proposition corrélative de la définition, dont on déduira les théorèmes corrélatifs de ceux que nous avons déduits de la définition, par exemple, la construction par plans tangents lorsqu'on en connaîtra neuf.

En allant plus loin, nous appellerons *plan polaire* d'un point le lieu des points conjugués harmoniques de ce point par rapport aux points d'intersection de la surface et d'une droite quelconque passant par le point. Ce lieu est évidemment un plan, car un plan quelconque passant par le point le coupe suivant une droite. Si dans ce plan on prend un triangle conjugué par rapport à la section de la surface, ses trois sommets et le point donné seront les sommets d'un tétraèdre conjugué à la surface, car la face opposée à l'un quelconque d'entre eux renferme trois des points de son plan polaire. De la définition du plan polaire résultent tous les théorèmes relatifs aux pôles, droites et plans polaires, et en particulier celui-ci :

Si par une arête d'un tétraèdre conjugué on fait passer un plan, le pôle de cette droite par rapport à la section de la surface par le plan est l'intersection du plan avec l'arête opposée.

Si l'une des faces s'éloigne à l'infini, le sommet opposé devient le centre, car toute corde passant par ce point est partagée par lui en deux parties égales; trois droites allant de ce point aux sommets d'un triangle conjugué à la section de la surface par le plan de l'infini sont des diamètres conjugués, car si l'on applique le théorème précédent, un plan parallèle à deux d'entre elles, passant par l'intersection de leur plan et du plan de l'infini,

passe par une arête du tétraèdre conjugué; donc, dans ce plan, le pôle de cette droite, c'est-à-dire le centre de la section, est l'intersection du plan avec l'arête opposée, c'est-à-dire avec le troisième diamètre : d'où la notion du centre et des diamètres conjugués. Ainsi, dans une surface du second degré, la série des diamètres conjugués trace sur le plan de l'infini des triangles conjugués à la section de la surface par ce plan. Si la surface est un cône, on peut étendre par la perspective ce théorème à une section quelconque. C. Q. F. D.

D'où l'on conclut la démonstration de l'existence des axes, ainsi que nous l'avons vu, et leur construction, qui d'ailleurs ne saurait être linéaire, puisque c'est un problème du troisième degré.

Tel est notre avant-projet de théorie géométrique des surfaces du second degré. On pourra en trouver le développement dans un Mémoire dont l'insertion nous a été promise dans le *Journal de l'École Polytechnique*, et l'on y verra que la théorie de l'involution plane s'y applique aussi bien que celle de l'involution linéaire à la théorie des sections coniques.

QUESTIONS DE LICENCE;

PAR M. GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques.

EXERCICES SUR LES ROULETTES EXTÉRIEURES ET INTÉRIEURES DANS LES COURBES PLANES.

Définitions. — On dit qu'une courbe mobile G (*fig.* 1) roule *extérieurement*, à un instant donné, sur une courbe fixe F, quand le point de contact I, centre instantané de

la rotation, se trouve placé entre les points O et C, centres de courbure des deux courbes.

Fig. 1.

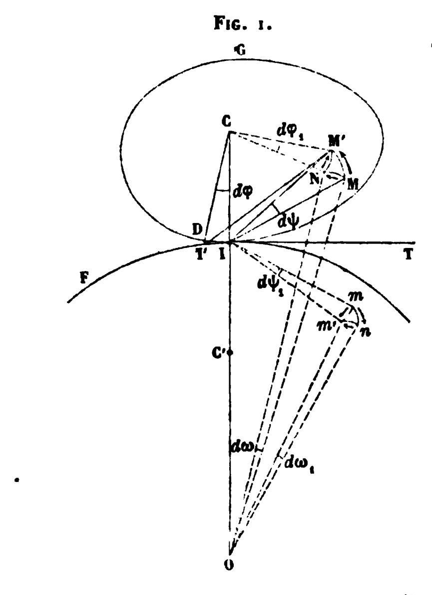
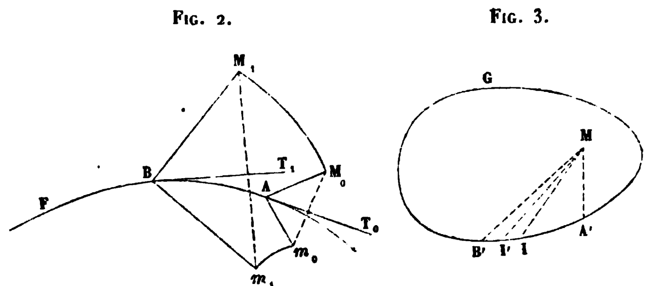


Fig. 2. Fig. 3.



On dit qu'une courbe mobile roule *intérieurement* sur une courbe fixe quand le centre de courbure C' de la courbe mobile est situé entre le centre de courbure O de la courbe fixe et le point I, centre instantané de la rotation (*fig.* 1).

Dans un mouvement fini, les courbes G et F restant toujours tangentes l'une et l'autre, les différents points d'un arc A'B' de G (*fig.* 3, p. 463) viennent successivement coïncider avec les points correspondants d'un arc égal AB de la courbe fixe (*fig.* 2, p. 463); dans le roulement *extérieur* un point M invariablement lié à la courbe mobile décrit une *roulette extérieure* MM', et dans le roulement *intérieur* le même point M décrit une *roulette intérieure mm'*.

Pour déterminer ces deux roulettes, on peut à chaque instant remplacer F et G par leurs cercles de courbure, qu'on suppose animés d'une rotation infiniment petite autour du point de contact.

Les courbes F et G que nous considérons sont quelconques et même non définies géométriquement. Nous supposons que leurs courbures ne présentent pas de discontinuité.

Théorème. — *Si l'on fait rouler extérieurement d'abord, intérieurement ensuite, un arc donné quelconque* A'B' *de la courbe mobile sur un arc égal* AB *de la courbe fixe, la somme des arcs* MM' *et mm' décrits dans ces deux mouvements par un point quelconque* M *du plan de la courbe mobile est indépendante de la nature de la courbe fixe* (*fig.* 1, 2, 3, p. 463).

Soient :

R, le rayon de courbure OI;

r, le rayon de courbure CI;

II', le déplacement infiniment petit du centre instantané de rotation à la fin des deux rotations élémentaires, l'une intérieure, l'autre extérieure, que nous considérons;

$\widehat{ICI'}$, l'angle élémentaire $d\varphi$ pris pour infiniment petit principal;

MM′ et mm', les arcs élémentaires des deux roulettes, extérieure et intérieure.

La rotation élémentaire *extérieure* est une rotation de la courbe mobile G autour d'un axe passant en I, et perpendiculaire à son plan. D'après le théorème de Poinsot, nous la décomposons en deux rotations autour d'axes parallèles au premier, et passant, l'un en O, l'autre en C; ce qui revient à faire décrire au point M, au lieu de l'arc de cercle MM′ de centre I, les arcs MN de centre O et NM′ de centre C. En appelant dt l'élément du temps, les vitesses angulaires de ces diverses rotations sont

$$\text{Autour du point I :} \quad \Psi = \frac{d\psi}{dt},$$

$$\text{Autour du point O :} \quad \Omega = \frac{d\omega}{dt},$$

$$\text{Autour du point C :} \quad \Phi = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Elles se composent entre elles comme des forces parallèles et de même sens, et l'on a

$$\frac{\Phi}{R} = \frac{\Omega}{r} = \frac{\Psi}{R+r};$$

ces relations, si l'on y remplace les vitesses par les angles élémentaires qui leur sont proportionnels, peuvent s'écrire comme il suit :

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{R} = \frac{d\omega}{r} = \frac{d\psi}{R+r}.$$

Décomposons de même la rotation élémentaire *intérieure* en deux autres, l'une autour d'un axe passant en O, et l'autre autour d'un axe passant en un point C′ tel que IC′ = IC; remarquons que les rotations en C′ et en I

sont de même sens, et que la rotation en O est de sens contraire; les vitesses angulaires de ces diverses rotations sont :

$$\text{Autour du point I :}\quad \Psi_1 = \frac{d\psi_1}{dt},$$

$$\text{Autour du point O :}\quad \Omega_1 = \frac{d\omega_1}{dt},$$

$$\text{Autour du point C' :}\quad \Phi = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Elles se composent comme des forces parallèles et de sens contraires, et l'on a

$$\frac{d\varphi}{R} = \frac{d\omega_1}{r} = \frac{d\psi_1}{R-r}. \tag{2}$$

En comparant les équations (1) et (2), on voit que $d\omega_1 = d\omega$;, et, par suite, il vient

$$\frac{d\varphi}{R} = \frac{d\omega}{r} = \frac{d\psi_1}{R-r}. \tag{3}$$

Cela posé, désignons par ρ le rayon vecteur $MI = mI$, et calculons les arcs élémentaires ds et ds_1 des roulettes extérieure et intérieure.

En vertu des équations (1) et (3), on trouve

$$(4)\quad \begin{cases} \text{arc}\, MM' = ds = \rho\, d\psi = \rho(d\varphi + d\omega) = \rho\, d\varphi\left(\dfrac{R+r}{R}\right); \\ \text{arc}\, mm' = ds_1 = \rho\, d\psi_1 = \rho(d\varphi - d\omega) = \rho\, d\varphi\left(\dfrac{R-r}{R}\right); \end{cases}$$

et, si l'on ajoute les deux équations (4), il vient

$$ds + ds_1 = 2\rho\, d\varphi. \tag{5}$$

Les valeurs de ρ et de $d\varphi$ dépendent de la nature de la courbe mobile, mais nullement de la courbe fixe. Le théo-

rème énoncé est donc vrai pour des arcs élémentaires; mais il est également vrai pour des arcs finis quelconques.

En effet, prenons deux limites quelconques de φ, φ_0 et φ_1; l'on aura (*fig.* 2, p. 463)

$$\text{arc}\, M_0 M_1 = S = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} ds,$$

$$\text{arc}\, m_0 m_1 = S_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} ds_1.$$

En effectuant, entre les limites φ_0 et φ_1, l'intégration de l'expression (5), il vient

$$(6) \qquad S + S_1 = 2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho\, d\varphi.$$

Le second membre de l'équation (6) est indépendant de la nature de la courbe fixe, et le théorème est démontré.

Théorème. — *Si l'on fait rouler extérieurement d'abord, intérieurement ensuite, un arc donné quelconque* A′B′ *de la courbe mobile sur un arc égal* AB *de la courbe fixe, la somme des surfaces décrites dans ces deux mouvements par le rayon vecteur qui joint, à chaque instant, le point décrivant au centre instantané de rotation est indépendante de la nature de la courbe fixe.*

L'aire élémentaire $da =$ IMM′I′ décrite dans la rotation *extérieure* se compose de deux parties, le secteur de cercle IMM′ et le triangle IM′I′ (*fig.* 1, p. 463).

Or, le triangle IM′I′, à un infiniment petit du second ordre près, est égal à l'élément MID de la surface G compris entre l'arc ID = II′, et les rayons vecteurs MI et MD

issus du point décrivant; l'élément $MID = d\sigma$ dépend donc uniquement de la nature de la courbe mobile.

De même, l'aire élémentaire $da_1 = Imm_1I'$ décrite dans la rotation intérieure se compose de deux parties $ImI' = d\sigma$, et du secteur de cercle Imm'.

On trouve donc, d'après ce qui vient d'être dit, et en tenant compte des équations (1) et (3),

$$(7)\qquad \begin{cases} da = d\sigma + \dfrac{\rho^2}{2}\left(\dfrac{R+r}{R}\right) d\varphi, \\ da_1 = d\sigma + \dfrac{\rho^2}{2}\left(\dfrac{R-r}{R}\right) d\varphi; \end{cases}$$

et, par suite, il vient

$$(8)\qquad da + da_1 = 2d\sigma + \rho^2 d\varphi.$$

Le théorème énoncé est donc vrai pour des surfaces élémentaires, mais il est également vrai pour des surfaces finies.

En effet, prenons deux limites quelconques de φ, φ_0 et φ_1, et l'on aura

$$\Sigma = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\sigma = \text{surface } A'MB' \quad (\textit{fig. } 3, \text{ p. } 463),$$

$$\left.\begin{aligned} A &= \text{surface } AM_0M_1BA \\ A_1 &= \text{surface } Am_0m_1BA \end{aligned}\right\} (\textit{fig. } 2, \text{ p. } 463).$$

En effectuant entre les limites φ_0 et φ_1 l'intégration de l'expression (8), il vient

$$(9)\qquad A + A_1 = 2\Sigma + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \rho^2 d\varphi.$$

Le second membre de l'équation (9) est indépendant de la nature de la courbe fixe, et le théorème est démontré.

Remarque. — Ces deux propositions remarquables sont dues à M. Hennig; mais la démonstration qui précède est différente de celle que cet auteur a publiée (*Journal de Crelle,* année 1865).

Rectification et quadrature des roulettes. — Puisque les sommes $S + S_1$ et $A + A_1$ sont indépendantes de la nature de la courbe fixe, on pourra les obtenir en faisant rouler la courbe mobile donnée sur une courbe fixe convenablement choisie, qui sera par exemple une droite, ou bien une courbe identique à la courbe mobile.

On évaluera directement la surface Σ de la formule (9).

Si maintenant, on peut trouver, par un procédé quelconque, les rapports $\frac{S}{S_1}$, $\frac{A}{A_1}$, on en déduira les valeurs de A, A_1, S, S_1, qui dépendent, comme on sait, à la fois, de la courbe fixe et de la courbe mobile.

Première application. — La courbe mobile est un cercle de rayon r. Quand on le fait rouler sur une droite, un point M de son plan décrit une cycloïde, soit ordinaire, soit allongée ou raccourcie, suivant la position du point M. Or, on connaît l'arc et la surface de ces courbes (*voir* un article de M. Dieu, *Nouvelles Annales,* t. XI). Il est facile en outre d'évaluer Σ.

Si maintenant on fait rouler le cercle r extérieurement, et intérieurement, sur un cercle de rayon R, le point M décrira une épicycloïde et une hypocycloïde qui seront, soit ordinaires, soit allongées ou raccourcies, suivant la position du point décrivant dans le cercle générateur.

Or, dans le cas actuel, les rapports $\frac{S}{S_1}$ et $\frac{A - \Sigma}{A_1 - \Sigma}$ sont constants et égaux à $\frac{R + r}{R - r}$.

On trouvera donc les arcs et les surfaces de toutes ces

roulettes, au moyen de l'arc et de la surface des cycloïdes. Nous laissons au lecteur le soin de faire ces calculs.

En particulier, on sait que la longueur d'une branche de cycloïde ordinaire est égale à 8 fois le rayon r du cercle générateur, et que sa surface est le triple de celle du même cercle. Donc les longueurs d'une branche d'épicycloïde et d'hypocycloïde ordinaires seront respectivement

$$S = \frac{8r(R+r)}{R}, \quad S_1 = \frac{8r(R-r)}{R}.$$

Si $r = \frac{R}{2}$, d'après le théorème de Cardan, l'hypocycloïde devient le diamètre du cercle fixe, ce que l'on vérifie aisément ; car l'on a, dans ce cas,

$$S_1 = \frac{4R\left(R - \frac{R}{2}\right)}{R} = 2R = 4r;$$

et de même

$$S = 6R = 12r.$$

Deuxième application. — Si l'on fait rouler la courbe mobile sur une courbe identique à elle-même, en sorte que ces deux courbes soient à chaque instant symétriques l'une de l'autre par rapport à la tangente commune, on sait que la roulette extérieure décrite par un point M sera l'homothétique double de la podaire du point M par rapport à la courbe à laquelle il est lié. La roulette intérieure se réduit à un point.

Or, la podaire d'un cercle pour un point quelconque de son plan est un limaçon de Pascal.

Les rectifications et les quadratures de toutes les cycloïdes, épicycloïdes et hypocycloïdes se ramèneront donc à la rectification et à la quadrature du limaçon de Pascal.

On démontrera ainsi sans peine les théorèmes suivants :

I. L'arc de cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, décrit par un point situé à une distance d du centre du cercle générateur dè rayon r et correspondant à une rotation $\varphi_1 - \varphi_0$ dudit cercle, est égal à l'arc compris entre les deux rayons vecteurs φ_1 et φ_0 du limaçon de Pascal, dont l'équation polaire est

$$\rho = r - d\cos\varphi.$$

II. Dans les cycloïdes susdésignées, les surfaces comprises entre deux points de la courbe (φ_1 et φ_0), les ordonnées de ces points et l'axe des x, sont égales au double du secteur correspondant du limaçon de Pascal

$$\rho = r - d\cos\varphi,$$

secteur compris entre la courbe et les rayons vecteurs φ_1 et φ_0.

EXERCICE SUR L'EMPLOI DES COORDONNÉES POLAIRES;

Par M. GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques.

Problème. — *Un angle constant tourne autour du foyer d'une conique; au point où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe. Trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes.*

Solution. — La conique donnée, rapportée à son foyer comme pôle, et à son axe focal comme axe polaire, a pour

équation

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - e\cos\omega}{p}.$$

On sait que, lorsque $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$ représente l'équation d'une courbe, la tangente à cette courbe en un point pour lequel $\omega = a$ est donnée par l'équation

$$\frac{1}{\rho} = f(a)\cos(\omega - a) + f'(a)\sin(\omega - a).$$

(DE COMBEROUSSE, *Cours de Mathématiques*, t. III, p. 265.)

Dans le cas actuel, la tangente à la courbe (1) en un point A situé sur le rayon vecteur $\omega = a$ est donnée par

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}\cos(\omega - a) - \frac{e}{p}\cos\omega;$$

et la tangente en un point B situé sur la courbe et le rayon vecteur $\omega = b$, par

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}\cos(\omega - b) - \frac{e}{p}\cos\omega.$$

La condition posée dans l'énoncé du problème est la suivante :

$$(4)\qquad b - a = \text{const.} = \text{K}.$$

Un point quelconque du lieu est donné par l'intersection des droites (2) et (3), dans lesquelles les paramètres a et b sont liés par la relation (4); en éliminant a et b entre ces trois équations, on aura l'équation du lieu.

On met (2) et (3) sous la forme

$$(2\ bis)\qquad \frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega = \frac{1}{p}\cos(\omega - a),$$

$$(3\ bis)\qquad \frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega = \frac{1}{p}\cos(\omega - b);$$

il s'ensuit $\cos(\omega - a) = \cos(\omega - b)$, c'est-à-dire

$$(5) \qquad \omega - a = 2n\pi \pm (\omega - b);$$

mais l'angle K est supposé $<$ 180 degrés, et $b - a = K$; on ne peut donc avoir ni $b = a$, ni $b = a + 2n\pi$; on doit prendre le signe — dans le second membre de (5), et poser

$$(6) \qquad 2\omega = a + b + 2n\pi.$$

Multiplions (2 *bis*) par (3 *bis*), transformons en somme de cosinus le produit des seconds membres, il vient, vu (6),

$$\left(\frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega\right)^2 = \frac{1}{2p^2}\left\{\cos[2\omega - (a+b)] + \cos(b-a)\right\}$$
$$= \frac{1}{2p^2}(1 + \cos K) = \frac{1}{p^2}\cos^2\frac{K}{2},$$

et, en extrayant la racine,

$$\frac{1}{\rho} + \frac{e}{p}\cos\omega = \pm\frac{1}{p}\cos\frac{K}{2};$$

et, par suite, le lieu est représenté par

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - \left(\dfrac{e}{\cos\frac{K}{2}}\right)\cos\omega}{\left(\dfrac{p}{\cos\frac{K}{2}}\right)}$$

et par

$$(7\ bis) \qquad \frac{1}{\rho} = -\frac{1 + \left(\dfrac{e}{\cos\frac{K}{2}}\right)\cos\omega}{\left(\dfrac{p}{\cos\frac{K}{2}}\right)}.$$

Discussion. — On remarque que les deux équations (7) et (7 *bis*) ne sont pas distinctes l'une de l'autre ; car on passe de la première à la seconde, en changeant ρ en $-\rho$, et ω en $\pi+\omega$; elles représentent donc la même courbe, et il suffit de discuter l'une d'elles, (7) par exemple.

La courbe représentée par (7) est une conique homofocale à la proposée (1) ; son excentricité $e'=\dfrac{e}{\cos\frac{K}{2}}$, et son paramètre $p'=\dfrac{p}{\cos\frac{K}{2}}$.

Si la conique proposée est une hyperbole ($e>1$), la conique (7) est toujours une hyperbole, facile à construire.

Si la proposée est une parabole ($e=1$), le lieu (7) est toujours une hyperbole, excepté dans le cas singulier où $\cos\frac{K}{2}=\pm 1$, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$K=0 \quad \text{ou} \quad K=360 \text{ degrés};$$

on trouve alors, pour le lieu, une parabole qui se confond avec la proposée (1), ce qui devait être.

Si la proposée (1) est une ellipse ($e<1$), le lieu (7), suivant qu'on a $e'<1$, $e'>1$, ou $e'=1$, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, ce qui revient aux conditions suivantes :

$$(8)\quad \begin{cases} \textit{Ellipse,} & \text{si} \quad \cos\frac{K}{2}>\frac{c}{a}; \\ \textit{Hyperbole,} & \text{si} \quad \cos\frac{K}{2}<\frac{c}{a}; \\ \textit{Parabole,} & \text{si} \quad \cos\frac{K}{2}=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

Si l'on joint par deux droites le foyer pris pour origine aux deux sommets de la proposée, situés sur son petit axe, et qu'on appelle α l'angle de ces deux droites, on trouve

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{c}, \quad \text{ou} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{a}.$$

Or, l'angle K étant supposé toujours < 180 degrés, les conditions (8) font savoir que le lieu (7) sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'angle donné K sera plus petit que l'angle α, ou plus grand, ou lui sera égal.

En effet, cet angle α est l'angle minimum de tous les angles β sous lesquels on voit du foyer les différents diamètres de l'ellipse; les angles β varient depuis α jusqu'à 180 degrés; si donc l'angle donné K est plus petit que α, la corde AB d'intersection des côtés de cet angle avec l'ellipse ne sera jamais un diamètre, et les deux tangentes à la courbe en A et en B ne pourront pas être parallèles; par suite, il n'y aura pas de point du lieu situé à l'infini, et la conique (7) sera fermée.

Si l'angle K est égal à α, il y aura une position, et une seule, où la corde AB sera un diamètre de la proposée (1); ce cas se présentera quand AB se confondra avec le petit axe; alors le lieu (7) est une parabole aisée à construire.

Si l'angle K est plus grand que α, on trouvera deux directions asymptotiques symétriques par rapport à l'axe polaire; le lieu est alors une hyperbole dont la construction n'offre aucune difficulté.

BIBLIOGRAPHIE.

(Tous les Ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, Quai des Augustins, 55.)

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ; par *P.-F. Compagnon*, professeur au Collége Stanislas. Cet Ouvrage est surtout destiné aux jeunes gens qui se préparent aux Écoles du Gouvernement. In-8°, avec figures. Paris, Gauthier-Villars, 1868. — Prix : 7 francs.

ABRÉGÉ DES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ; par *le même*. Cet Ouvrage s'adresse plus particulièrement aux élèves de l'enseignement secondaire spécial, aux élèves des différentes classes de lettres et aux candidats au baccalauréat ès sciences. In-8°, avec figures. Paris, Gauthier-Villars, 1868. — Prix : 4 fr. 50 c.

En feuilletant les *Éléments de Géométrie* de M. Compagnon, nous avons d'abord été surpris d'y trouver de nombreuses modifications, en opposition avec les ouvrages reçus ; mais, en nous livrant à une étude plus attentive, notre étonnement s'est dissipé peu à peu, à mesure que nous comprenions mieux les motifs des changements proposés, et, en définitive, nous donnons à ces changements notre entière approbation.

Voici quelques-unes des raisons qui ont servi à fixer notre jugement.

1° M. Compagnon s'est attaché d'une manière toute spéciale à faire marcher de front *l'ordre dans les idées*, *l'ordre dans les vérités* et *l'ordre dans les opérations ou problèmes fondamentaux*, et c'est en cela que réside surtout le caractère essentiel de sa méthode. Jusqu'ici les auteurs d'Éléments de Géométrie se sont appliqués seulement à mettre de l'ordre dans les idées et dans les vérités, sans trop se préoccuper de l'ordre dans les

opérations; aussi ont-ils tous abouti à un arrangement de propositions, dépendant plus ou moins de leurs dispositions particulières d'esprit et pouvant être remplacé, sans inconvénient notable, par d'autres arrangements analogues.

2° Au moyen de sa méthode, il conduit toujours l'élève du simple au composé, du facile au difficile, et il est arrivé à ce résultat très-remarquable : que son plan peut être suivi à la fois dans les classes préparatoires aux Écoles du Gouvernement, dans toutes les classes de lettres et dans celles de l'enseignement secondaire spécial. Pour les élèves qui se destinent aux Écoles, il a composé des *Éléments de Géométrie* très-developpés; pour les élèves des classes de lettres et pour ceux de l'enseignement spécial, il a rédigé un *Abrégé* de ces Éléments, c'est-à-dire de vrais *Éléments de Géométrie réduits à un très-grand degré de simplicité*, et il a eu soin de faire précéder ce dernier Ouvrage d'une table de problèmes que les élèves peuvent résoudre pratiquement, si le développement de leur intelligence ne leur permet pas encore d'aborder l'étude raisonnée de la Géométrie.

3° Dans tous les cas, les élèves peuvent être exercés *dès la première leçon* au maniement de la règle et du compas, et à la fin du premier Livre, ils ont appris graduellement à construire les figures les plus simples, tandis que jusqu'ici ils n'arrivaient à ces constructions qu'après avoir démontré un grand nombre de théorèmes, en s'aidant, pour suivre les raisonnements, de figures tracées à main levée. D'après les *Éléments* de Legendre, par exemple, un élève ne peut construire aucune figure avec la règle et le compas, avant d'être arrivé à la fin des théorèmes du premier et du second Livre, qui sont au nombre de cinquante-sept; bien plus, pendant qu'il étudie le premier livre, il est censé ignorer ce qu'on entend par une circonférence, ce que c'est qu'un compas, et tous les Auteurs qui sont venus après Legendre n'ont rien changé à sa méthode sous ce rapport; du reste, il est facile de s'en rendre compte, car les problèmes consistant : à *mener par l'extrémité d'une droite donnée une seconde droite faisant avec la première un angle donné*, à *élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite*, etc., ne peuvent être résolus

qu'après avoir étudié les positions relatives de deux circonférences.

Passons maintenant à une analyse très-succincte de l'Ouvrage qui nous occupe.

Il est divisé en huit Livres, et M. Compagnon motive ce genre de division dans les deux Notes 45 et 54 (p. 430 et 455).

Le Livre I est consacré à la construction des figures les plus simples et à la démonstration de leurs propriétés les plus élémentaires. Il comprend cinq Chapitres, qui ont successivement pour titres : *Conséquences les plus immédiates des propriétés de la ligne droite et de la définition de la circonférence. — Des positions relatives de deux circonférences. Dépendance mutuelle des arcs et des cordes. — Des positions relatives de deux droites. Triangle, quadrilatère, polygone. — Des positions d'une ou de plusieurs droites par rapport à une circonférence. — Problèmes.*

L'Auteur a tiré un parti fort remarquable de la plus petite distance d'un point à une circonférence, et il s'en est servi très-adroitement (p. 41) pour démontrer qu'*un côté d'un triangle devient de plus en plus grand lorsqu'on fait croître l'angle opposé sans changer la longueur des côtés qui le comprennent*, ce qui revient au fond à faire voir que *la distance des deux pointes d'un compas, à branches égales ou inégales, augmente à mesure qu'on ouvre le compas davantage.*

Dans le Livre II, il est question de la *mesure des droites, des angles et des surfaces polygonales*. Ainsi, dans le premier Livre, on se proposait surtout de construire des *figures*, tandis que dans le second on a pour but principal de déterminer des *nombres*.

Le Livre III contient la théorie des *polygones semblables*, les *relations métriques* élémentaires qui en résultent, et *divers problèmes graphiques* très-importants, fondés sur ces relations. Ce livre commence par le théorème de Thalès, qui consiste à démontrer que *deux triangles équiangles sont semblables*, et nous félicitons l'Auteur d'avoir ainsi mis en relief un théorème si simple et d'une si grande utilité.

Le Livre IV traite des *polygones réguliers*, de *la mesure de la*

circonférence et du cercle. Il est à peu près la reproduction du quatrième Livre de Legendre; seulement l'ordre de quelques propositions a été changé avec avantage. Les mesures de la circonférence et du cercle y sont établies très-simplement au moyen du *principe des limites*.

Les Livres V, VI, VII, VIII ont aussi beaucoup de ressemblance avec les quatre derniers Livres de Legendre; toutefois l'Auteur les a divisés, comme les précédents, en Chapitres et Paragraphes, ce qui facilite beaucoup l'étude aux jeunes gens et leur procure le moyen de mieux retenir ce qu'ils ont appris. Le Livre V, entre autres, nous a paru irréprochable dans toutes ses parties : sa division en Chapitres, la division de ses Chapitres en Paragraphes correspondant aux différentes théories, la netteté, la simplicité et la précision des démonstrations en font un vrai modèle du genre, dont les professeurs et les élèves reconnaîtront surtout les avantages dans l'étude de la Géométrie descriptive. Nous ajouterons aussi qu'après avoir établi dans le Livre VII les *mesures élémentaires des surfaces et des volumes de révolution* et les avoir appliquées à la *mesure de la surface et du volume de la sphère*, l'Auteur a rejeté dans le Livre VIII les notions les plus indispensables sur les *figures tracées sur la surface de la sphère*.

Enfin, les huit Livres des *Éléments de Géométrie* proprement dits sont suivis de Notes nombreuses qui se rattachent aux différentes parties du *texte* par des numéros de renvoi, en sorte qu'on peut étudier le texte seul ou à la fois le texte et les Notes. Ces Notes se rapportent : aux *centres des moyennes distances*, à *l'homothétie*, aux *transversales*, à la *division harmonique des droites*, aux *figures inverses*, aux *polygones étoilés*, au *quadrilatère gauche*, etc.

En résumé, nous ne doutons pas que l'Ouvrage de M. Compagnon ne soit appelé à rendre de grands services aux jeunes gens; il les initiera de bonne heure à la construction exacte des figures et à la mesure des grandeurs géométriques; il les habituera à mettre de l'ordre dans leurs connaissances, et il contribuera de toutes manières au développement de leurs facultés

intellectuelles. On y sent à chaque page l'expérience d'un homme qui a vécu longtemps avec la jeunesse et qui n'oublie jamais que le but de l'enseignement ne consiste pas à faire une proposition isolée, mais que la grande œuvre et la grande difficulté du professorat est d'amener les élèves à savoir coordonner et appliquer les connaissances qu'ils acquièrent successivement.

J. et R.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (ANNÉE 1868).

Tracé graphique.

On propose de construire les projections d'un tétraèdre régulier ABCD, sachant :

1° Que les arêtes ont toutes $0^m,098$ de longueur;

2° Que la projection horizontale *a* du sommet A est à $0^m,114$ de la ligne de terre;

3° Que la projection horizontale *b* du sommet B est à droite de *a*, à une distance de $0^m,081$ de ce point, et à une distance de $0^m,033$ de la ligne de terre;

4° Que la projection horizontale *c* du sommet C est à gauche de *a* et de *b*, à une distance de $0^m,060$ de *a*, et à une distance de $0^m,048$ de *b*;

5° Que la projection verticale *d'* du sommet D est située au-dessous de la projection verticale *a'* de A à une distance de $0^m,043$ de la ligne de terre.

Calcul numérique de trigonométrie rectiligne.

Trouver les angles, la surface, le rayon du cercle circonscrit, le rayon du cercle inscrit, les rayons des cercles ex-inscrits du triangle dont les côtés sont :

$$a = 41\,162,80$$
$$b = 32\,930,24$$
$$c = 24\,697,68.$$

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. L. PAINVIN.

PRÉLIMINAIRES.

1. Soient les équations de deux surfaces du second ordre

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(S)\ & A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2+2A_{12}xy+2A_{13}xz\\ & +2A_{14}xt+2A_{23}yz+2A_{24}yt+2A_{34}zt=0,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}(T)\ & B_{11}x^2+B_{22}y^2+B_{33}z^2+B_{44}t^2+2B_{12}xy+2B_{13}xz\\ & +2B_{14}xt+2B_{23}yz+2B_{24}yt+2B_{34}zt=0;\end{aligned}\right.$$

ces deux équations, prises simultanément, représentent une courbe, intersection des deux surfaces considérées.

L'équation générale des surfaces du second ordre, passant par cette courbe, est

$$S+\lambda T=0,$$

ou

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(A_{11}+\lambda B_{11})x^2+(A_{22}+\lambda B_{22})y^2+(A_{33}+\lambda B_{33})z^2\\ &+(A_{44}+\lambda B_{44})t^2+2(A_{12}+\lambda B_{12})xy+2(A_{13}+\lambda B_{13})xz\\ &+2(A_{14}+\lambda B_{14})xt+2(A_{23}+\lambda B_{23})yz\\ &\qquad+2(A_{24}+\lambda B_{24})yt+2(A_{34}+\lambda B_{24})zt=0,\end{aligned}\right.$$

λ étant une constante arbitraire. L'équation (3) représente un cône, si l'on a

$$(4)\quad \begin{vmatrix} A_{11}+\lambda B_{11} & A_{12}+\lambda B_{12} & A_{13}+\lambda B_{13} & A_{14}+\lambda B_{14}\\ A_{21}+\lambda B_{21} & A_{22}+\lambda B_{22} & A_{23}+\lambda B_{23} & A_{24}+\lambda B_{24}\\ A_{31}+\lambda B_{31} & A_{32}+\lambda B_{32} & A_{33}+\lambda B_{33} & A_{34}+\lambda B_{34}\\ A_{41}+\lambda B_{41} & A_{42}+\lambda B_{42} & A_{43}+\lambda B_{43} & A_{44}+\lambda B_{44}\end{vmatrix}=0,$$

car le premier membre de l'équation (3) peut alors se ramener à une fonction homogène de trois variables. Les coordonnées des sommets de ces cônes seront fournies par les équations

$$(4\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} S'_x + \lambda T'_x &= 0,\\ S'_y + \lambda T'_y &= 0,\\ S'_z + \lambda T'_z &= 0,\\ S'_t + \lambda T'_t &= 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on développe l'équation (4), on aura une équation en λ de la forme

$$(5)\qquad \Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta_1\lambda + \Delta_1 = 0;$$

Δ et Δ_1 sont les discriminants des fonctions S et T.

On voit par là que l'équation en λ ne saurait avoir de racines réelles ou infinies que dans le cas où l'une des surfaces considérées se réduit à un cône.

Je ne ferai que rappeler la proposition suivante, dont la démonstration est facile (*voir* mon *Analytique à deux dimensions*, n° 881).

L'équation en λ conserve les mêmes racines, lorsqu'on rapporte les surfaces du second ordre à un nouveau système quelconque de coordonnées, soit cartésiennes, soit tétraédriques.

La situation respective des deux surfaces S et T, ou la nature de leur courbe d'intersection, dépend complétement de la nature des racines de l'équation en λ; la discussion de cette équation, discussion qui jusqu'à présent n'a pas encore été faite, présente donc un très-grand intérêt, soit au point de vue de la théorie, soit au point de vue des applications.

2. Si l'on suppose distinctes les quatre racines de l'é-

quation en λ, on aura quatre cônes passant par la courbe d'intersection, Γ, des deux surfaces S et T; je choisirai, pour sommets du *tétraèdre de référence* ABCD, les sommets distincts de ces quatre cônes. D'après cela, si λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont les racines de l'équation (4), on devra avoir pour $\lambda = \lambda_1$, par exemple, un cône ayant son sommet en A, c'est-à-dire que l'équation (3) ne devra pas renfermer de termes en x; on conclura de là :

$$\frac{A_{11}}{B_{11}} = \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{A_{13}}{B_{13}} = \frac{A_{14}}{B_{14}} = -\lambda_1;$$

on aura de même, en écrivant que pour $\lambda = \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ l'équation (3) représente des cônes ayant respectivement leurs sommets en B, C, D :

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{A_{22}}{B_{22}} = \frac{A_{23}}{B_{23}} = \frac{A_{24}}{B_{24}} = -\lambda_2,$$

$$\frac{A_{31}}{B_{31}} = \frac{A_{32}}{B_{32}} = \frac{A_{33}}{B_{33}} = \frac{A_{34}}{B_{34}} = -\lambda_3,$$

$$\frac{A_{41}}{B_{41}} = \frac{A_{42}}{B_{42}} = \frac{A_{43}}{B_{43}} = \frac{A_{44}}{B_{44}} = -\lambda_4.$$

Or, d'après l'hypothèse admise, les racines λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 sont différentes; les égalités précédentes conduisent alors aux valeurs qui suivent :

$$A_{12} = 0,\quad A_{13} = 0,\quad A_{14} = 0,\quad A_{23} = 0,\quad A_{24} = 0,\quad A_{34} = 0;$$
$$B_{12} = 0,\quad B_{13} = 0,\quad B_{14} = 0,\quad B_{23} = 0,\quad B_{24} = 0,\quad B_{34} = 0.$$

Les équations des deux surfaces (S) et (T) se trouvent donc ramenées à la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} (S) & a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 t^2 = 0, \\ (T) & b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 z^2 + b_4 t^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second ordre, pas-

sant par la courbe d'intersection des deux surfaces S et T, est alors

$$(7)\quad (a_1+\lambda b_1)x^2+(a_2+\lambda b_2)y^2+(a_3+\lambda b_3)z^2+(a_4+\lambda b_4)t^2=0,$$

et l'équation en λ devient

$$(8)\quad (a_1+\lambda b_1)(a_2+\lambda b_2)(a_3+\lambda b_3)(a_4+\lambda b_4)=0.$$

En substituant dans l'équation (7) les valeurs de λ fournies par l'équation (8), on trouve, pour les équations des quatre cônes passant par la courbe d'intersection des surfaces S et T :

$$(9)\left\{\begin{aligned}
&(C_1)\quad (a_2 b_1 - a_1 b_2)y^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)z^2 \\
&\qquad\qquad + (a_4 b_1 - a_1 b_4)t^2 = 0, \quad \text{sommet A;}\\
&(C_2)\quad (a_1 b_2 - a_2 b_1)x^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3)z^2 \\
&\qquad\qquad + (a_4 b_2 - a_2 b_4)t^2 = 0, \quad \text{sommet B;}\\
&(C_3)\quad (a_1 b_3 - a_3 b_1)x^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)y^2 \\
&\qquad\qquad + (a_4 b_3 - a_3 b_4)t^2 = 0, \quad \text{sommet C;}\\
&(C_4)\quad (a_1 b_4 - a_4 b_1)x^2 + (a_2 b_4 - a_4 b_2)y^2 \\
&\qquad\qquad + (a_3 b_4 - a_4 b_3)t^2 = 0, \quad \text{sommet D.}
\end{aligned}\right.$$

Des équations (9) on conclut cette proposition multiple :

Lorsque l'équation en λ a quatre racines distinctes, il y a quatre cônes du second ordre passant par la courbe d'intersection Γ des deux surfaces du second ordre considérées.

Les sommets de ces quatre cônes FORMENT UN TÉTRAÈDRE ABCD CONJUGUÉ *par rapport à chacune des surfaces du second ordre; plus généralement, ce tétraèdre est conjugué par rapport à toutes les surfaces du second ordre qui passent par la courbe gauche Γ.*

Chacun des cônes est lui-même conjugué par rapport au trièdre dont le sommet coïncide avec celui du cône.

On voit encore par les équations (4 *bis*) que :

La détermination des sommets des cônes du second degré, qui passent par l'intersection de deux surfaces du second ordre, revient à la recherche des points qui ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces.

Enfin, la forme simple des équations (6) permet de démontrer très-facilement que :

La courbe gauche, intersection des deux surfaces S *et* T, *est de quatrième ordre et de huitième classe.*

3. La discussion complète de l'équation en λ exige l'examen des différentes hypothèses qui suivent :

1° Les quatre racines de l'équation en λ sont réelles ;

2° Deux racines sont réelles, et deux sont imaginaires ;

3° Les quatre racines sont imaginaires ;

4° L'équation en λ a deux racines égales ;

5° Elle a trois racines égales ;

6° Elle a deux couples de racines égales ;

7° Les quatre racines sont égales ;

8° L'équation en λ a une ou plusienrs racines nulles ;

9° L'équation en λ a des racines nulles et des racines infinies ;

10° Cas où l'équation en λ se réduit à une identité ;

11° Détermination des branches infinies de la courbe d'intersection.

Il est visible que un ou plusieurs des cônes, passant par la courbe d'intersection de deux surfaces du second ordre, peuvent avoir leur sommet à l'infini, c'est-à-dire peuvent devenir des cylindres. Je ferai abstraction de ces cas particuliers dans la discussion que je vais développer ;

d'ailleurs les conclusions resteront les mêmes, et on pourra toujours les soumettre à une analyse tout à fait semblable à celle qui sera exposée.

§ I. — *L'équation en λ a ses quatre racines réelles.*

4. *Lorsque l'équation en λ a ses quatre racines réelles, les sommets des quatre cônes* C_1, C_2, C_3, C_4 *sont réels. Si les quatre cônes sont réels, la courbe d'intersection des deux surfaces est toujours réelle; si deux des cônes sont imaginaires, la courbe d'intersection est toujours imaginaire; les quatre cônes ne peuvent pas être tous quatre imaginaires.*

Les sommets des cônes qui passent par la courbe d'intersection des deux surfaces sont réels, car leurs coordonnées sont fournies par les équations (4 *bis*) n° 1; or ces équations sont à coefficients réels, puisque, d'après l'hypothèse, les valeurs de λ sont réelles. En prenant les sommets de ces quatre cônes pour sommet du tétraèdre de référence ABCD, les équations des deux surfaces seront, n° 2,

$$(10)\qquad \begin{cases} (S) & ax^2 + by^2 + cz^2 + t^2 = 0, \\ (T) & a_1 x^2 + b_1 y^2 + c_1 z^2 + t^2 = 0; \end{cases}$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 étant des *coefficients réels.*

On déduit de là, pour les équations des quatre cônes C_1, C_2, C_3, C_4,

$$(11)\qquad \begin{cases} (C_1) & Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0, \\ (C_2) & C_1 y^2 - B_1 z^2 + At^2 = 0, \\ (C_3) & -C_1 x^2 + A_1 z^2 + Bt^2 = 0, \\ (C_4) & B_1 x^2 - A_1 y^2 + Ct^2 = 0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll} A = a - a_1, & A_1 = bc_1 - b_1 c, \\ B = b - b_1, & B_1 = ca_1 - c_1 a, \\ C = c - c_1, & C_1 = ab_1 - a_1 b; \end{array}\right.$$

d'où résulte l'identité

$$(13)\qquad AA_1 + BB_1 + CC_1 = o.$$

Il est d'abord visible que :

1° Les quatre cônes peuvent être réels;

2° Il peut y avoir des cônes imaginaires, mais il y en a au plus deux.

En effet, si l'on suppose, par exemple,

$$A > o,\quad B > o,\quad C < o,\quad A_1 > o,\quad B_1 > o,\quad C_1 > o,$$

l'identité (13) peut être satisfaite, et les quatre cônes (11) sont évidemment réels.

Cherchons maintenant s'ils peuvent être tous quatre imaginaires; il faudrait d'abord que l'on eût

$$A > o,\quad B > o,\quad C > o;$$

mais, pour que l'identité (13) soit vérifiée, il faudrait qu'une au moins des quantités A_1, B_1, C_1 fût négative; on voit alors qu'il y a toujours, parmi les cônes (11), deux cônes réels et deux cônes imaginaires.

5. Si les quatre cônes (11) sont réels, les trois quantités A, B, C doivent avoir des signes différents; supposons d'abord

$$(1^{\circ})\qquad A > o,\quad B > o,\quad C < o;$$

les signes de A_1, B_1, C_1 restant arbitraires, on pourra toujours faire en sorte que les cônes soient réels, tout en vérifiant l'identité (13). Nous pouvons construire la

courbe d'intersection des deux surfaces à l'aide des deux cônes ayant respectivement leurs sommets en A et en B, ou, ce qui revient au même, en cherchant les intersections des surfaces (10) par des plans passant par la droite AB.

L'équation d'un tel plan sera

$$(2^\circ) \qquad t = \alpha z;$$

en substituant cette valeur de t dans les équations (10) des deux surfaces, on trouve

$$ax^2 + by^2 + (c + \alpha^2) z^2 = 0,$$
$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + (c_1 + \alpha^2) z^2 = 0;$$

d'où, en résolvant par rapport à x^2 et y^2, et en ayant égard aux notations (12),

$$(3^\circ) \qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{B\alpha^2 + A_1}{C_1} z^2, \\ y^2 = \dfrac{B_1 - A\alpha^2}{C_1} z^2. \end{cases}$$

Pour que la courbe d'intersection soit réelle, il faut et il suffit qu'on puisse disposer de α de manière que les valeurs (3°) de x et de y soient réelles.

Soit, en premier lieu, $C_1 > 0$; il faut et il suffit que

$$(4^\circ) \quad B\alpha^2 + A_1 > 0, \quad B_1 - A\alpha^2 > 0, \quad \text{ou} \quad -\frac{A_1}{B} < \alpha^2 < \frac{B_1}{A}.$$

Pour que cette double inégalité puisse être satisfaite, il faut d'abord que

$$-\frac{A_1}{B} < \frac{B_1}{A}, \quad \text{ou} \quad AA_1 + BB_1 > 0,$$

ou enfin, d'après l'identité (13),

$$-CC_1 > 0;$$

inégalité vraie, puisque C est négatif, et C_1 positif. Mais il faut, en outre, que α^2 soit positif, c'est-à-dire que la limite supérieure $\frac{B_1}{A}$ soit positive, ce qui aura lieu, si l'on suppose B_1 positif; or cette supposition est nécessaire, car, si B_1 était négatif, le cône C_2 serait imaginaire. On voit d'ailleurs que, dans les hypothèses actuelles, les quatre cônes sont réels.

Soit, en second lieu, $C_1 < 0$; il faut et il suffit que

$$(5^\circ)\quad B\alpha^2 + A_1 < 0,\quad B_1 - A\alpha^2 < 0,\quad \text{ou}\quad \frac{B_1}{A} < \alpha^2 < -\frac{A_1}{B}.$$

Pour que cette double inégalité puisse être satisfaite, il faut d'abord que

$$\frac{B_1}{A} < -\frac{A_1}{B},\quad \text{ou}\quad AA_1 + BB_1 < 0,$$

ou enfin, d'après l'identité (13),

$$-CC_1 < 0;$$

inégalité vraie, puisque C et C_1 sont négatifs. Mais il faut, en outre, que α^2 soit positif, c'est-à-dire que la limite supérieure $-\frac{A_1}{B}$ soit positive; or si A_1 était positif, l'identité (13) exigerait que B_1 fût négatif, le cône C_4 serait alors imaginaire; A_1 doit donc être négatif, et on pourra toujours obtenir des valeurs réelles pour x et y. On peut encore constater que, dans les hypothèses admises, les quatre cônes sont réels.

Ainsi, lorsqu'on suppose les quatre cônes réels, et qu'on admet les inégalités

$$A > 0,\quad B > 0,\quad C < 0,$$

la courbe d'intersection des deux surfaces est nécessaire-

ment réelle. Il resterait à examiner les hypothèses

$$A > 0, \quad B < 0, \quad C < 0; \quad \text{puis} \quad A > 0, \quad B < 0, \quad C > 0,$$

car on peut toujours supposer A positif; mais il est évident que, pour la première hypothèse, par exemple, nous n'aurons qu'à reproduire identiquement la discussion précédente, en prenant un plan passant par BC; et pour la deuxième hypothèse, il suffira de prendre un plan passant par AC.

6. Lorsque deux des cônes sont imaginaires, la courbe d'intersection des deux surfaces est imaginaire.

Car si cette courbe était réelle, en joignant ses différents points aux sommets réels A, B, C, D des quatre cônes, on obtiendrait quatre cônes réels.

7. *Lorsque la courbe d'intersection est réelle, un plan quelconque passant par les arêtes du tétraèdre* ABCD *rencontre la courbe ou en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.*

En effet, si nous prenons un plan passant par AB, $t = \alpha z$, ses intersections avec les surfaces (10) seront données par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} ax^2 + by^2 + (c + \alpha^2) z^2 = 0, \\ a_1 x^2 + b_1 y^2 + (c_1 + \alpha^2) z^2 = 0. \end{array} \right.$$

Or ces deux équations peuvent être assimilées à celles de deux coniques; l'équation en μ, donnant les systèmes de cordes communes, sera

$$\begin{vmatrix} a + \mu a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b + \mu b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c + \mu c_1 + \alpha^2 (\mu + 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Les trois racines de cette équation sont réelles, quel

que soit α; ces deux coniques se coupent donc en quatre points réels ou en quatre points imaginaires; par suite, les cônes correspondants se couperont suivant quatre génératrices réelles, ou quatre génératrices imaginaires; donc, etc.

§ II. — *L'équation en λ a deux racines réelles et deux imaginaires.*

8. ***Lorsque l'équation en λ a deux racines réelles et deux imaginaires, deux des sommets sont réels, et les deux autres sont imaginaires conjugués; les deux cônes correspondant aux sommets réels sont réels, et les deux cônes correspondant aux sommets imaginaires sont nécessairement imaginaires. La courbe d'intersection des deux surfaces est toujours réelle.***

A une valeur réelle de λ correspond un sommet réel, et à une valeur imaginaire correspond un sommet imaginaire, car les équations (4 *bis*) n° 1, qui déterminent les coordonnées de ces sommets, sont du premier degré par rapport à x, y, z, t et λ.

Je dis maintenant que le cône correspondant à une valeur imaginaire de λ est nécessairement imaginaire; car, si $\lambda = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, l'équation (3) n° 1, qui représente ce cône, devient

$$(S + \alpha T) + \beta\sqrt{-1}\, T = 0;$$

or, si cette dernière équation représentait un cône réel, on aurait à la fois

$$S = 0, \quad T = 0$$

pour tous les points réels du cône représenté; les équations $S = 0$, $T = 0$ représenteraient alors toutes deux le même cône : c'est un cas qui n'exige évidemment aucune discussion.

Nous verrons plus loin que les cônes correspondant aux racines réelles sont eux mêmes réels.

9. Soient A et B les sommets réels ; désignons par CD la droite réelle sur laquelle se trouvent les deux sommets imaginaires conjugués. Je prendrai pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant pour sommets les deux points réels A et B, et pour arête opposée la droite CD ; les sommets C et D restent pour le moment arbitraires.

D'après les propriétés énoncées au n° 2, le choix du tétraèdre indiqué revient à dire que le plan polaire d'un point quelconque de AB, par rapport aux deux surfaces, passe par CD, et inversement ; et, en outre, que le plan polaire du point A, par rapport aux surfaces, passe par le point B, et inversement.

Prenons les équations générales (1) et (2), n° 1, le plan polaire d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0), par rapport à la première surface, a pour équation

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_0(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t) \\ & + y_0(A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t) \\ & + z_0(A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + A_{34}t) \\ & + t_0(A_{41}x + A_{42}y + A_{43}z + A_{44}t) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées d'un point quelconque situé sur AB sont $(x_0, y_0, z_0 = 0, t_0 = 0)$; le plan (14) doit passer par CD, quel que soit ce point, c'est-à-dire que son équation ne doit renfermer que les termes en x et en y, et cela quels que soient x_0 et y_0 ; on devra donc avoir

$$(1^\circ) \qquad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{14} = 0, \quad A_{24} = 0,$$

et alors les plans polaires des points de CD passeront par AB.

Si maintenant on exprime que le plan polaire du point A $(y_0 = 0, z_0 = 0, t_0 = 0)$ passe par le point B, il

en résulte

(2°) $$A_{12} = 0,$$

et alors le plan polaire du point B passera par le sommet A.

Les équations des deux surfaces se présenteront donc toutes deux sous la forme

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{34}zt = 0.$$

Les coefficients de x^2 et de y^2 ne peuvent pas être nuls dans ces équations, car, dans l'une ou l'autre hypothèse, ces équations représenteraient des cônes, et l'équation en λ aurait alors des racines nulles ou infinies. Nous pouvons donc supposer égaux à l'unité les coefficients de α^2, et les équations des deux surfaces se ramèneront à la forme

(15) $$\begin{cases} (S) & x^2 + ay^2 + bz^2 + ct^2 + 2dzt = 0, \\ (T) & x^2 + a_1y^2 + b_1z^2 + c_1t^2 + 2d_1zt = 0, \end{cases}$$

les coefficients a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 étant des quantités réelles.

L'équation en λ devient alors

(16) $$(\lambda + 1)(a + \lambda a_1)[(b + \lambda b_1)(c + \lambda c_1) - (d + \lambda d_1)^2] = 0.$$

Nous allons maintenant déterminer les sommets des deux cônes imaginaires, c'est-à-dire les deux points situés sur l'arête CD et ayant même plan polaire par rapport aux deux surfaces (15).

Les coordonnées d'un point situé sur CD sont $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, z_0, t_0; les polaires de ce point, par rapport aux surfaces (15), auront pour équations

$$z(bz_0 + dt_0) + t(dz_0 + ct_0) = 0,$$
$$z(b_1z_0 + d_1t_0) + t(d_1z_0 + c_1t_0) = 0;$$

exprimons que ces deux plans coïncident, il vient, en développant

$$(17)\quad (bd_1 - b_1 d) z_0^2 + (bc_1 - b_1 c) z_0 t_0 + (dc_1 - d_1 c) t_0^2 = 0.$$

D'après l'hypothèse admise, ces coordonnées sont imaginaires; or, dans ce cas, on pourra disposer de la position des sommets C et D du tétraèdre de référence, sur la droite réelle CD, de manière que

$$(18)\quad bc_1 - b_1 c = 0, \quad \text{et} \quad bd_1 - b_1 d = dc_1 - d_1 c :$$

je justifierai tout à l'heure cette assertion.

Des égalités (18) on conclut

$$(18\ bis)\quad \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k, \quad (b + c)(d_1 - kd) = 0;$$

mais on ne peut pas admettre l'égalité $d_1 - kd = 0$, car l'équation (16) en λ aurait alors deux racines égales; on a donc

$$(18\ ter)\quad b + c = 0, \quad b_1 + c_1 = 0.$$

Par conséquent, *les équations des deux surfaces peuvent être amenées à la surface définitive*

$$(19)\quad \begin{cases} (S) & x^2 + ay^2 + b(z^2 + t^2) + 2dzt = 0, \\ (T) & x^2 + a_1 y^2 + b_1(z^2 + t^2) + 2d_1 zt = 0, \end{cases}$$

a, b, d, a_1, b_1, d_1 étant des coefficients réels.

10. Pour justifier l'assertion sur laquelle s'appuie cette réduction, je remarque que si, conservant les deux plans fixes ACD et BCD du tétraèdre de référence, on prend deux plans ABC′ et ABD′, les coordonnées x et y d'un point ne changeront pas, mais les coordonnées z et t prendront de nouvelles valeurs z' et t'. Soient

$$z - \alpha t = 0, \quad z - \beta t = 0,$$

les équations des deux nouveaux plans ABC′ et ABD′, les distances z' et t' du point (x, y, z, t) à ces deux plans seront

$$(20)\quad z' = \frac{z - \alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta}}, \quad t' = \frac{z - \beta t}{\sqrt{1 + \beta^2 - 2\beta\cos\theta}},$$

θ étant l'angle des deux plans fixes ACD et BCD.

Ceci posé, si l'on a une équation telle que

$$(21)\qquad Mz^2 + 2Nzt + Pt^2 = 0,$$

cette équation deviendra, en y remplaçant z et t par les valeurs que fournissent les formules (20),

$$(21\ bis)\qquad M_1 z'^2 + 2N_1 z't' + P_1 t'^2 = 0.$$

Or, si l'on admet l'inégalité

$$(22)\qquad N^2 - MP < 0,$$

qui exprime que les racines de l'équation (21) sont imaginaires, on pourra toujours trouver pour α et β des valeurs réelles, de manière qu'on ait à la fois

$$(23)\qquad N_1 = 0, \quad M_1 = P_1.$$

On est, en effet, conduit aux deux équations de condition

$$(24)\ \begin{cases} M\alpha\beta + N(\alpha + \beta) + P = 0, \\ \alpha\beta(M\cos\theta + N) + \dfrac{P - M}{2}(\alpha + \beta) - (P\cos\theta + N) = 0. \end{cases}$$

Or, pour que les valeurs de α et de β soient réelles, il faut et il suffit que

$$(MN + 2MP\cos\theta + PN)^2$$
$$-(M^2 + 2MN\cos\theta + N^2 - Q^2)(P^2 + 2NP\cos\theta + N^2 - Q^2) > 0,$$

après avoir posé

$$Q^2 = MP - N^2;$$

en développant cette inégalité, on trouve

$$(25)\quad (\mathrm{MP}-\mathrm{N}^2)\left\{[2\mathrm{N}+(\mathrm{M}+\mathrm{P})\cos\theta]^2+(\mathrm{M}-\mathrm{P})^2\sin^2\theta\right\}>0,$$

inégalité qui est toujours vraie si l'on a égard à l'hypothèse (22).

11. Ceci démontré, reprenons les deux équations réduites (19)

$$(19)\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) & x^2+ay^2+b(z^2-t^2)+2dzt=0, \\ (\mathrm{T}) & x^2+a_1y^2+b_1(z^2-t^2)+2d_1zt=0; \end{cases}$$

l'équation générale des surfaces, passant par la courbe d'intersection de S et T, est

$$(26)\quad \begin{cases} (\lambda+1)x^2+(a_1+\lambda a)y^2+(b_1+\lambda b)(z^2-t^2) \\ \qquad\qquad +2(d_1+\lambda d)zt=0, \end{cases}$$

et l'équation en λ devient

$$(27)\quad (\lambda+1)(a_1+\lambda a)[(b_1+\lambda b)^2+(d_1+\lambda d)^2]=0.$$

Les équations des deux cônes ayant leurs sommets aux points réels A et B sont

$$(28)\quad \begin{cases} (\mathrm{C}_1) & \mathrm{A}y^2+\mathrm{B}(z^2-t^2)+2\mathrm{D}zt=0, \\ (\mathrm{C}_2) & \mathrm{A}x^2+\mathrm{B}'(z^2-t^2)+2\mathrm{D}'zt=0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(29)\quad \begin{cases} \mathrm{A}=a-a_1, \quad \mathrm{B}=b-b_1, \quad \mathrm{D}=d-d_1; \\ \qquad \mathrm{B}'=ab_1-a_1b, \quad \mathrm{D}'=ad_1-a_1d. \end{cases}$$

Les équations des deux cônes (28) peuvent s'écrire, en décomposant en carrés,

$$(30)\quad \begin{cases} \mathrm{AB}y^2+(\mathrm{B}z+\mathrm{D}t)^2-(\mathrm{B}^2+\mathrm{D}^2)t^2=0, \\ \mathrm{AB}'y^2+(\mathrm{B}'z+\mathrm{D}'t)^2-(\mathrm{B}'^2+\mathrm{D}'^2)t^2=0; \end{cases}$$

on voit, par là, que *les deux cônes dont les sommets sont réels sont toujours réels.*

12. Nous allons maintenant constater que *la courbe d'intersection des deux surfaces* S *et* T *est toujours réelle.*

Nous pouvons, en effet, construire cette courbe à l'aide des deux cônes réels ayant leurs sommets en A et B, ou, ce qui revient au même, en cherchant les intersections des deux surfaces avec un plan quelconque passant par AB. Soit

$$(31) \qquad t = \alpha z$$

l'équation de ce plan; remplaçons t par cette valeur dans les équations (19), il vient

$$(32) \qquad \begin{cases} x^2 + a y^2 + [b(1-\alpha^2) + 2d\alpha] z^2 = 0, \\ x^2 + a_1 y^2 + [b_1(1-\alpha^2) + 2d_1\alpha] z^2 = 0 : \end{cases}$$

ce sont les équations de deux cônes ayant leur sommet en D.

On peut assimiler les équations (32) à celles de deux coniques, et l'équation en μ qui correspond au système des sécantes communes est

$$(1+\mu)(1+\mu a_1)][(b+\mu b_1)(1-\alpha^2) + 2\alpha(d+\mu d_1)] = 0;$$

les deux racines de cette équation sont réelles, quel que soit α, les deux cônes (32) se coupent donc suivant quatre génératrices réelles ou quatre génératrices imaginaires; ainsi, un plan quelconque passant par AB rencontre la courbe d'intersection des deux surfaces ou en quatre points réels ou en quatre points imaginaires.

Cette remarque faite en passant, revenons aux équations (32) : en les résolvant par rapport à x^2 et y^2, et en ayant égard aux notations (29), on trouve

$$(33) \qquad \begin{cases} A y^2 + [B(1-\alpha^2) + 2D\alpha] z^2 = 0, \\ A x^2 + [B'(1-\alpha^2) + 2D'\alpha] z^2 = 0. \end{cases}$$

Or nous pouvons admettre que l'on ait, par exemple,

$$(34) \qquad \frac{D}{B} > \frac{D'}{B'};$$

et alors, si nous posons

$$(35)\quad \begin{cases} h = \frac{D}{B} - \sqrt{1 + \frac{D^2}{B^2}}, & h' = \frac{D'}{B'} - \sqrt{1 + \frac{D'^2}{B'^2}}, \\ k = \frac{D}{B} + \sqrt{1 + \frac{D^2}{B^2}}, & k' = \frac{D'}{B'} + \sqrt{1 + \frac{D'^2}{B'^2}}, \end{cases}$$

on vérifie, sans difficulté, qu'on a toujours la série d'inégalités

$$(36)\qquad h' < h < k' < k.$$

D'ailleurs les équations (33) peuvent s'écrire

$$(37)\quad \begin{cases} \frac{A}{B} y^2 - (\alpha - h)(\alpha - k) z^2 = 0, \\ \frac{A}{B'} x^2 - (\alpha - h')(\alpha - k') z^2 = 0. \end{cases}$$

D'après cela, il est facile de constater qu'on pourra toujours choisir pour α des valeurs telles que les valeurs de x^2 et de y^2 fournies par les équations (37) soient réelles; en effet :

Si $\frac{A}{B} > 0$ et $\frac{A}{B'} > 0$, on prendra pour α des valeurs inférieures à h' ou des valeurs supérieures à k;

Si $\frac{A}{B} > 0$ et $\frac{A}{B'} < 0$, on prendra pour α des valeurs comprises entre h' et h;

Si $\frac{A}{B} < 0$ et $\frac{A}{B'} < 0$, on prendra pour α des valeurs comprises entre h et k';

Si $\frac{A}{B} < 0$ et $\frac{A}{B'} > 0$, on prendra pour α des valeurs comprises entre k' et k.

Ainsi la courbe d'intersection des deux surfaces est

toujours réelle, car l'hypothèse $\frac{D'}{B'} < \frac{D}{B}$ donnerait lieu à une discussion tout à fait semblable.

Remarque. — On ne peut pas admettre que les limites h, k, h', k' deviennent égales ; car si l'on avait, par exemple, $h' = h$, il en résulterait

$$\frac{D}{B} = \frac{D'}{B'}, \quad \text{ou} \quad (bd_1 - b_1 d)(a_1 - a) = 0;$$

mais alors l'équation en λ (27) aurait deux racines égales, ce qui est contraire à l'hypothèse.

§ III. — *L'équation en λ a ses quatre racines imaginaires.*

13. *Lorsque l'équation en λ a ses quatre racines imaginaires, les quatre cônes sont imaginaires ; la courbe d'intersection des deux surfaces est réelle.*

D'abord les quatre cônes sont imaginaires, car la démonstration du n° 8 est applicable au cas actuel. Les sommets des quatre cônes forment deux couples de points imaginaires conjugués : soient C_1, C_2 les deux premiers, C_3, C_4 les deux autres, les droites C_1C_2 et C_3C_4 sont réelles. Nous obtiendrons tous les points de la courbe par les intersections d'un plan quelconque passant par la droite C_1C_2, par exemple, avec les deux cônes imaginaires ayant leurs sommets en C_1 et C_2. Or ce plan réel coupera le premier cône suivant deux droites imaginaires non conjuguées, et il coupera le second cône suivant deux droites imaginaires respectivement conjuguées des deux premières : ces quatre droites se couperont en deux points réels, et deux seulement. La courbe d'intersection des deux surfaces est donc réelle, et un plan quelconque passant par C_1C_2 ou C_3C_4 ne rencontre cette courbe qu'en deux points réels.

Cette proposition peut encore se démontrer comme il suit.

Prenons pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant deux de ses sommets sur la droite réelle $C_1 C_2$, et les deux autres sur la droite réelle $C_3 C_4$. C'est ce que nous ferons en exprimant que le plan polaire d'un point quelconque de la droite $C_1 C_2$ passe par la droite $C_3 C_4$, et inversement n° 2. A l'aide d'un calcul semblable à celui qui a été fait au n° 9, on trouve que les équations des deux surfaces se ramènent à la forme

$$(38)\quad \begin{cases} (S) & ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + 2exy + 2fzt = 0, \\ (T) & a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + d_1t^2 + 2e_1xy + 2f_1zt = 0. \end{cases}$$

Les sommets des cônes situés sur CD sont imaginaires conjugués; laissant fixes les sommets A et B du tétraèdre de référence, nous pourrons déplacer les sommets C et D sur la droite CD de manière que, n°s 9 et 10, $d + c = 0$, $d_1 + c_1 = 0$; les équations des deux surfaces se réduiront alors à

$$ax^2 + by^2 + c(z^2 - t^2) + 2exy + 2fzt = 0,$$
$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1(z^2 - t^2) + 2e_1xy + 2f_1zt = 0.$$

De même, laissant fixes les nouveaux sommets C' et D' du tétraèdre de référence, nous pourrons déplacer les sommets A et B sur la droite AB de manière que $a + b = 0$, $a_1 + b_1 = 0$.

. Donc, en définitive, *les équations des deux surfaces pourront toujours se ramener à la forme*

$$(39)\quad \begin{cases} (S) & a(x^2 - y^2) + c(z^2 - t^2) + 2bxy + 2dzt = 0, \\ (T) & a_1(x^2 - y^2) + c_1(z^2 - t^2) + 2b_1xy + 2d_1zt = 0, \end{cases}$$

a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 étant des coefficients réels.

La courbe d'intersection des deux surfaces peut se con-

struire à l'aide de plans passant par AB, soit

$$t = \alpha z \tag{40}$$

l'équation d'un de ces plans ; si l'on substitue cette valeur dans les équations (39) des deux surfaces, il vient

$$(41) \begin{cases} a(x^2 - y^2) + 2bxy + [c(1-\alpha^2) + 2d\alpha]z^2 = 0, \\ a_1(x^2 - y^2) + 2b_1xy + [c_1(1-\alpha^2) + 2d_1\alpha]z^2 = 0; \end{cases}$$

ce sont les équations de deux cônes ayant leurs sommets en D. Assimilant ces équations à celles de deux coniques, l'équation en μ qui détermine les sécantes communes est

$$(42) \begin{vmatrix} a + \mu a_1 & b + \mu b_1 & 0 \\ b + \mu b_1 & -(a + \mu a_1) & 0 \\ 0 & 0 & (c + \mu c_1)(1 - \alpha^2) + 2\alpha(d + \mu d_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, quel que soit α, deux des racines de cette dernière équation sont toujours imaginaires ; donc, les deux coniques (ou les deux cônes) se coupent, quel que soit α, suivant deux génératrices réelles. Ainsi la courbe d'intersection des deux surfaces est toujours réelle.

(*La suite prochainement.*)

MÉMOIRE SUR LES SYMPTOMES D'IMAGINARITÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

(voir 2e série, t. VII, p. 308) ;

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Licencié ès Sciences, Professeur à Paris.

DEUXIÈME PARTIE.

THÉORÈME V. — *Étant donnée une équation algébrique d'un degré quelconque complète, ou rendue telle,*

$$A_0 x^m + A_1 X^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

si toutes les racines sont réelles, on a entre trois termes consécutifs

$$A_p x^{m-p}, \quad A_{p+1} x^{m-p-1}, \quad A_{p+2} x^{m-p-2},$$

la relation suivante due à Euler

$$A_{p+1}^2 = \text{ ou } > \frac{(m-p)(p+2)}{(m-p-1)(p+1)} A_p A_{p+2}.$$

Démonstration. — *Voyez* les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. II, p. 256.

Corollaire I. — Si une équation algébrique complète, ou rendue telle, donne entre les coefficients de trois termes consécutifs, les exposants et les indices, la relation

$$A_{p+1}^2 < \frac{(m-p)(p+2)}{(m-p-1)(p+1)} A_p A_{p+2},$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

Corollaire II. — Si une équation algébrique complète, ou rendue telle, a toutes ses racines réelles, on a

$$A_{p+1}^2 > \frac{m-p}{m-p-1} A_p A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 > \frac{p+2}{p+1} A_p A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 > A_p A_{p+2}.$$

Corollaire III. — Si une équation algébrique complète, ou rendue telle, donne

$$A_{p+1}^2 = \text{ ou } < \frac{m-p}{m-p-1} A_p A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 = \text{ ou } < \frac{p+2}{p+1} A_p A_{p+2},$$

$$A_{p+1}^2 = \text{ ou } < A_p A_{p+2},$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

Corollaire IV. — Toutes les valeurs de la variable p forment la progression arithmétique

$$\div 0.1.2.3\ldots(m-2):$$

si, dans le corollaire précédent, on fait $p = m - 2$ dans la première formule, et $p = 0$ dans la deuxième, on trouve respectivement

$$A_{m-1}^2 = \text{ ou } < 2A_{m-2}A_m,$$
$$A_1^2 = \text{ ou } < 2A_0A_2.$$

Observations. — M. Ossian Bonnet est arrivé à cette dernière formule par une autre voie (*voir* les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. IV, p. 236). On peut encore arriver à ces deux formules, en remarquant que, si une équation a toutes ses racines réelles, l'équation aux carrés des racines doit être complète et ne doit avoir que des variations de signes. Enfin, l'une quelconque de ces deux formules se déduit de l'autre, par la considération de la transformée en $\frac{1}{x}$ de l'équation donnée. La dernière relation du Corollaire II est connue sons le nom de *Théorème de De Gua.* On la trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1741. Elle peut être démontrée très-simplement. On considère le produit du premier membre de l'équation donnée par $x-h$....

Corollaire V. — Pour abréger, posons

$$\mu = \frac{(m-p)(p+2)}{(m-p-1)(p+1)}.$$

Il est aisé de voir qu'on peut transformer cette expression

de la manière suivante :

$$\mu = 1 + \frac{m+1}{(m-p-1)(p+1)};$$

la somme des facteurs du dénominateur est constante et égale à m, par conséquent la valeur maximum de ce dénominateur est égale à $\left(\frac{m}{2}\right)^2$; donc

$$\mu = \text{ ou } > \left(\frac{m+2}{m}\right)^2;$$

donc si une équation algébrique complète, ou rendue telle, a toutes ses racines réelles, le trinôme formé par trois termes consécutifs donne

$$A_{p+1}^2 = \text{ ou } > \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 A_p A_{p+2};$$

par conséquent, si trois termes consécutifs d'une équation algébrique donnent

$$A_{p+1}^2 < \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 A_p A_{p+2},$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

THÉORÈME VI. — *Si les coefficients* P, Q, R *de trois termes consécutifs d'une équation algébrique complète, ou rendue telle, présentent deux permanences ou deux variations; si, de plus, les valeurs absolues, respectives* p, q, r *de ces coefficients forment une proposition harmonique, dans l'ordre où ils sont écrits ou dans l'ordre contraire, l'équation considérée a nécessairement des racines imaginaires.*

Première démonstration. — Sans diminuer le degré de généralité de la question, on peut supposer que p, q, r forment une proportion harmonique dans l'ordre où

ces nombres sont écrits; car, s'ils formaient une proportion harmonique dans l'ordre inverse, on considérerait la transformée en $\frac{1}{x}$ de l'équation donnée. Cela posé, on a, par définition,

$$\frac{p-q}{q-r}=\frac{p}{r},$$

d'où

$$q^2-pr=-pr\left(\frac{p-r}{p+r}\right)^2;$$

mais, par hypothèse, P et R sont de même signe; donc

$$Q^2-PR=-PR\left(\frac{P-R}{P+R}\right)^2,$$

d'où

$$Q^2-PR<0.$$

Si l'on suppose que r s'approche indéfiniment de p, jusqu'à en différer de moins toute quantité donnée, on aura

$$p=q=r,$$

et par suite

$$Q^2-PR=0;$$

donc si les valeurs absolues de P, Q, R sont égales ou inégales, et si elles forment une proportion harmonique, on a

$$(1)\qquad Q^2-PR=\text{ ou }<0.$$

Cela posé, si toutes les racines de l'équation considérée étaient réelles, le théorème de De Gua donnerait

$$(2)\qquad Q^2-PR>0;$$

comme les relations (1) et (2) sont incompatibles, il s'ensuit que l'équation donnée a nécessairement des racines imaginaires.

Deuxième démonstration. — Soit m la moyenne géométrique entre p et r. On a

$$m^2 - pr = 0.$$

Or, q étant la moyenne harmonique entre p et r, on peut démontrer aisément, soit par la géométrie, soit par le calcul, que l'on a

$$q = \text{ ou } < m;$$

dès lors

$$q^2 - pr = \text{ ou } < 0,$$

et par suite

$$Q^2 - PR = \text{ ou } < 0,$$

ce qui n'est autre chose que la relation (1). Arrivé à ce point, on continue comme dans la première démonstration.

Observation. — Si les valeurs absolues des trois coefficients P, Q, R sont en proportion harmonique, et si le nombre des variations que présentent ces coefficients est égal à l'unité, l'équation considérée n'a pas nécessairement des racines imaginaires.

Théorème VII. — *Si les valeurs absolues des coefficients* P, Q, R *de trois termes consécutifs d'une équation algébrique forment une proportion contre-harmonique dans l'ordre où ils sont écrits ou dans l'ordre inverse; si, en outre,* P *et* R *sont de même signe, je dis que l'équation n'a pas nécessairement des racines imaginaires.*

Démonstration. — En raisonnant comme dans la première partie de la démonstration du théorème précédent, on trouve que

$$Q^2 = \left(\frac{P^2 + R^2}{P + R}\right)^2;$$

posant

$$P = Ry,$$

il vient

$$Q^2 - \mu PR = \left(\frac{R}{y+1}\right)^2 \left[y^3.\overline{y-\mu} - (2y^2.\overline{\mu - 1} + \mu y - 1)\right];$$

y est évidemment plus grand que l'unité, par conséquent le second terme de la quantité entre crochets est toujours négatif; le premier terme peut avoir un signe quelconque; donc si

$$y = \text{ou} < \mu,$$

on aura

$$Q^2 - \mu PR < 0,$$

et l'équation aura nécessairement des racines imaginaires; si $y > \mu$, il y aura doute; donc, etc.

Théorème de M. Toeplitz. — *Soit l'équation*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

si

$$(n-1)a_1^2 - (n+2)a_2 < 0$$

l'équation a au moins un couple de racines imaginaires.

Démonstration. — De l'inégalité hypothétique, on tire

$$a_1^2 < 1 . a_2 \frac{n+2}{n+1};$$

or

$$n > \text{ ou } = 2,$$

donc

$$a_1^2 < 1 . a_2 \frac{n+n}{n-1}$$

ou

$$a_1^2 < 1 . a_2 \frac{2}{1} \frac{n}{n-1};$$

donc l'équation a des racines imaginaires d'après le premier corollaire de la formule d'Euler, où l'on ferait $p = 0$.

Théorème VIII. — *Soit*

$$x^m + \ldots + Px^{m-n} + Qx^{m-n-1} + Rx^{m-n-2} + Sx^{m-n-3} + Tx^{m-n-4} + \ldots = 0$$

une équation complète, ou rendue telle, dont toutes les racines sont réelles. Si les coefficients

P, Q, R, S, T

de cinq termes consécutifs sont tels, que le deuxième et le quatrième soient de même signe, les deux différences

$$QR - PS, \quad RS - QT$$

seront de même signe.

Démonstration. — En effet, λ désignant une quantité réelle indéterminée, multiplions le premier membre de l'équation donnée par $x^2 - \lambda^2$. Déterminons λ^2 par la condition que le coefficient du terme en x^{m-n-1}, dans ce produit, soit nul, ce qui est toujours possible d'après la seconde partie de l'hypothèse. Alors les coefficients des termes qui comprendront cette lacune devront être de signes contraires, d'après la première partie de l'hypothèse. Si l'on exprime cette circonstance, et qu'on élimine λ^2, on trouve que les deux différences en question sont de même signe.

Observation. — On serait arrivé au même résultat, mais plus laborieusement, si l'on avait employé le multi-

plicateur

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2,$$

dans lequel α et β désignent deux quantités réelles, indéterminées.

Corollaire. — Si dans une équation complète, cinq coefficients consécutifs

$$P,\quad Q,\quad R,\quad S,\quad T$$

sont tels, que le deuxième et le quatrième soient de même signe et que les deux différences

$$QR - PS,\quad RS - QT$$

soient de signes contraires, l'équation donnée a des racines imaginaires.

Problème. — *Étant donnée une équation algébrique rationnelle, entière, d'un degré quelconque, complète, et dont toutes les racines sont réelles, on demande : quelles sont les relations qui existent entre les coefficients de quatre termes consécutifs, le rang du premier de ces termes et le degré de l'équation ?*

Solution. — Soient : m le degré de l'équation;

$$Px^{m-p},\quad Qx^{m-p-1},\quad Rx^{m-p-2},\quad Sx^{m-p-3},$$

quatre termes consécutifs, et λ une quantité réelle, indéterminée. Multiplions le premier membre de l'équation par $x-\lambda$. Toutes les racines de l'équation résultante étant réelles, le théorème d'Euler donne

(1) $$(R - Q\lambda)^2 = \text{ ou } > \mu(Q - P\lambda)(S - R\lambda),$$

ou bien, en ordonnant par rapport à λ,

$$(Q^2 - PR\mu)\lambda^2 + [(PS + QR)\mu - 2QR]\lambda + R^2 - QS\mu = \text{ ou } > 0.$$

Cette relation devant avoir lieu, quelle que soit la valeur réelle attribuée à λ, on a, pour relations demandées,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &Q^2 - PR\mu = \text{ ou } > 0,\\ &R^2 - QS\mu = \text{ ou } > 0,\\ &[(PS + QR)\mu - 2QR]^2\\ &\quad - 4(Q^2 - PR\mu)(R^2 - QS\mu) = \text{ ou } < 0; \end{aligned}\right.$$

les signes se correspondent.

Corollaire I. — Si l'on a l'une quelconque des relations

$$Q^2 - PR\mu < 0,$$
$$R^2 - QS\mu < 0,$$
$$[(PS + QR)\mu - 2QR]^2 - 4(Q^2 - PR\mu)(R^2 - QS\mu) = \text{ ou } > 0,$$

on peut conclure que l'équation donnée a des racines imaginaires.

Observations. — La première des relations (2) n'est autre chose que l'expression analytique du théorème d'Euler appliqué aux trois termes consécutifs

$$Px^{m-p},\quad Qx^{m-p-1},\quad Rx^{m-p-2};$$

la deuxième, quoique de même forme que la première, n'est pas identique à celle que l'on trouverait si l'on appliquait ce même théorème aux trois termes consécutifs

$$Qx^{m-p-1},\quad Rx^{m-p-2},\quad Sx^{m-p-3},$$

parce que la quantité μ_1, relative à ces trois derniers termes, peut avoir une valeur différente de la quantité μ, relative aux trois premiers. Dès lors les deux binômes

$$R^2 - QS\mu,\quad R^2 - QS\mu_1$$

peuvent ne pas avoir le même signe. Celui des deux qui sera négatif accusera la présence des racines imaginaires dans l'équation donnée.

Corollaire II. — La seule inspection de l'expression de μ montre que l'on a toujours $\mu > 1$. Si dans la relation (1) on remplace μ par l'unité, on aura, *à fortiori*,

$$(R - Q\lambda)^2 > (Q - P\lambda)(S - R\lambda).$$

Cette inégalité devant avoir lieu quel que soit λ, on en déduit la proposition suivante : Si toutes les racines d'une équation algébrique sont réelles, on a entre les coefficients de quatre termes consécutifs les relations suivantes :

$$Q^2 - PR > 0.$$
$$R^2 - QS > 0,$$
$$(PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) < 0.$$

L'avant-dernière relation et l'antépénultième expriment la même proposition. C'est le théorème de De Gua. La dernière relation peut être trouvée directement et de plusieurs manières. (*Voir* les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 37 et p. 136.)

Corollaire III. — Si entre les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation algébrique on a une quelconque des trois relations

$$Q^2 - PR = \text{ ou } < 0,$$
$$R^2 - QS = \text{ ou } < 0,$$
$$(3) \quad (PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = \text{ ou } > 0,$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

Théorème de M. Hermite. — *Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation algébrique forment une progression arithmétique, cette équation a nécessairement des racines imaginaires.*

Démonstration. — Désignant par δ la raison de cette

progression, on a

$$Q = P + \delta, \quad R = P + 2\delta, \quad S = P + 3\delta,$$

d'où

$$(PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = 0;$$

donc, en vertu de la relation (3), l'équation a des racines imaginaires.

Théorème IX. — *Si les coefficients* P, Q, R, S *de quatre termes consécutifs d'une équation algébrique sont tels, que les trois différences*

$$P - Q, \quad Q - R, \quad R - S$$

soient en progression géométrique, l'équation a des racines imaginaires.

Première démonstration. — On a par hypothèse

$$(Q - R)^2 = (P - Q)(R - S),$$

ce que l'on peut mettre sous la forme

$$-(PS - QR)^2 = (Q^2 - PR) + (R^2 - QS);$$

élevant les deux membres au carré, et remarquant que l'on a toujours

$$a^2 + b^2 = \text{ou} > 2ab,$$

il vient

$$(PS - QR)^2 - 4(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = \text{ou} > 0,$$

ce qui n'est autre chose que la relation (3); donc, etc.

Deuxième démonstration. — Si l'équation donnée avait toutes ses racines réelles, il en serait de même après avoir multiplié son premier membre par $x - 1$, et le théorème de De Gua donnerait

$$(Q - R)^2 > (P - Q)(R - S),$$

ce qui est contre l'hypothèse; donc, etc.

Observation. — Ce théorème comporte celui de M. Hermite, car l'équation hypothétique est évidemment satisfaite par

$$P - Q = Q - R = R - S.$$

Théorème de M. Paul Serret. — *Si dans une équation algébrique, quatre termes consécutifs ont leurs coefficients en proportion géométrique, et si, de plus, les antécédents ont le même signe, l'équation aura des racines imaginaires.*

Démonstration. — Par hypothèse, on a

$$PS - QR = 0,$$

ce qui donne identiquement

$$(Q^2 - PR)(R^2 - QS) = -\frac{R}{P}(Q^2 - PR)^2.$$

Or P et R sont de même signe, par conséquent la relation (3) est satisfaite; donc, etc.

Théorème X. — *Une équation algébrique complète, d'un degré quelconque,*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0,$$

ne contient que des permanences. Si toutes les racines sont réelles, on a

$$A_p A_{m-p}(m-p)^2 = \text{ ou } < A_{p+1} A_{m-p-1}(p+1)^2.$$

Démonstration. — Appliquons le théorème d'Euler successivement aux trinômes formés par les trois premiers termes, par les trois seconds, par les trois troisièmes, etc., il vient

$$A_1^2(m-1).1 = \text{ ou } > A_0 A_2 m.2,$$
$$A_2^2(m-2).2 = \text{ ou } > A_1 A_3(m-1).3,$$
$$A_3^2(m-3).3 = \text{ ou } > A_2 A_4(m-2).4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{m-1}^2 1.(m-1) = \text{ ou } > A_{m-2} A_m 2.m;$$

multipliant ces relations, membre à membre, on trouve

$$(4) \qquad A_0 A_m m^2 = \text{ ou } < A_1 A_{m-1} \cdot 1^2,$$

ce qui démontre le théorème pour $p = 0$.

Pour toute racine de l'équation donnée, cette équation devient une identité; à ce point de vue, les dérivées de ses deux membres sont égales, ce qui donne

$$m A_0 x^{m-1} + (m - 1) A_1 x^{m-2} + \ldots + 2 A_{m-2} x + A_{m-1} = 0.$$

Cette équation a toutes ses racines réelles, d'après le théorème de Rolle. Sa transformée en $\frac{1}{x}$, savoir :

$$A_{m-1} x^{m+1} + 2 A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + (Cm - 1) A_1 x + m A_0 = 0,$$

aura aussi toutes ses racines réelles. L'équation dérivée de cette dernière équation aura également toutes ses racines réelles et ne contiendra que des permanences. Je lui applique le théorème exprimé par la relation (1), et je trouve

$$A_1 A_{m-1} (m - 1)^2 = \text{ ou } < A_2 A_{m-2} 2^2,$$

ce qui démontre le théorème pour $p = 1$.

En continuant de la sorte, on ferait voir que le théorème est vrai pour $p = 2$, $p = 3$; puis on ferait usage de la méthode de Newton, dite de *proche en proche*, pour compléter la démonstration.

Corollaire I. — Une équation algébrique complète ne contient que des permanences. Si on a

$$A_p A_{m-p} (m - p)^2 > A_{p+1} A_{m-p-1} (p + 1)^2$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

Corollaire II. — Si on multiplie membre à membre les $p - 1$ relations analogues à (1), et si on désigne par C^m le nombre de combinaisons de m objets pris p à p, il

vient

$$A_0 A_m (C_p^m)^2 = \text{ ou } < A_p A_{m-p}.$$

Corollaire III. — Si une équation algébrique complète ne contient que des permanences, et si de plus elle donne

$$A_0 A_m (C_p^m)^2 > A_p A_{m-p},$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

Corollaire IV. — Les mêmes choses étant posées que dans le corollaire précédent, si avec $m > p$ on a

$$A_0 A_m = \text{ ou } > A_p A_{m-p},$$

l'équation donnée a des racines imaginaires, car

$$C_p^m > 1.$$

Observation générale. — Si on avait une équation algébrique n'ayant que des variations, on ramènerait la question à ce qui précède par la considération de la transformée en $-x$.

Notation. — Nous conviendrons de désigner le produit de la suite naturelle des nombres entiers depuis 1 jusqu'à k inclusivement par $k!$. Cette notation est due à M. Kramp, ancien doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg. Ceci admis, la dérivée, de l'ordre k ($k < m$), de y^m pourra être mise sous la forme

$$\frac{m!}{(m-k!)} y^{m-k};$$

lorsque $k = m$, la dérivée correspondante, est $m!$. Ces détails trouvent leur application dans le cours de la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Soient*

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} + \ldots + A_m = 0,$$

ou plus laconiquement

$$(1)\qquad f(x)=0,$$

une équation algébrique complète, du degré m; a une quantité réelle indéterminée, et p un quelconque des nombres de la suite $0, 1, 2, \ldots, (m-2)$. *Si toutes les racines de cette équation sont réelles, on aura*

$$(2)\qquad [f^{(m-p-1)}(a)]^2 = \text{ ou } > \frac{p+2}{p+1} f^{(m-p)}(a) f^{(m-p-2)}(a).$$

Démonstration. — Posons

$$(3)\qquad x = a + y;$$

x et a étant des quantités réelles, il s'ensuit que y est réel; si on élimine x entre les équations (1) et (3), l'équation résultante, savoir :

$$\frac{f^{(m)}(a)}{m!} y^m + \ldots + \frac{f^{(m-p)}(a)}{(m-p)!} y^{m-p}$$
$$+ \frac{f^{(m-p-1)}(a)}{(m-p-1)!} y^{m-p-1} + \frac{f^{(m-p-2)}(a)}{(m-p-2)!} + \ldots + f(a) = 0,$$

aura toutes ses racines réelles. La dérivée de l'ordre $m-p-2$ du premier membre, égalée à zéro, aura toutes ses racines réelles, d'après le théorème de Rolle. Après quelques réductions, on trouve

$$\frac{f^{(m)}(a)}{(p+2)!} y^{p+2} + \ldots + \frac{1}{2} f^{(m-p)}(a) y^2 + f^{(m-p-1)}(a) y$$
$$+ f^{(m-p-2)}(a) = 0;$$

la transformée de cette équation en $\frac{1}{y}$, savoir :

$$f^{(m-p-2)}(a) y^{p+2} + f^{(m-p-1)}(a) y^{p+1}$$
$$+ \frac{1}{2} f^{(m-p)}(a) y^p + \ldots = 0,$$

aura aussi ses racines réelles. Je prends la dérivée de

l'ordre p de chaque membre. L'équation résultante

$$(p+1)(p+2)f^{(m-p-2)}(a)y^2 \\ + 2(p+1)f^{(m-p-1)}(a)y + f^{(m-p)}(a) = 0$$

aura ses racines réelles. Cette équation étant du *second degré*, si l'on écrit la condition qui exprime que ses racines sont réelles, on trouve la formule qu'il fallait démontrer.

Corollaire I. — Une équation algébrique a des racines imaginaire si l'on a

$$[f^{(m-p-1)}(a)]^2 < \frac{p+2}{p+1} f^{(m-p)}(a) f^{(m-p-2)}(a).$$

Corollaire II. — Une équation algébrique a des racines imaginaires si l'on a

$$[f^{(m-p-1)}(a)]^2 = \text{ ou } < f^{(m-p)}(a) f^{(m-p-2)}(a).$$

Corollaire III. — Si dans la formule (2) on fait $a = 0$, on trouve

$$A_{p+1}^2 = \text{ ou } > \frac{p+2}{p+1} \frac{m-p}{m-p-1} A_p A_{p+2},$$

ce qui n'est autre chose que la formule d'Euler.

Observation. — Le théorème ci-dessus repose sur la formule qui exprime la condition de la réalité des racines de l'équation du deuxième degré à une inconnue. On pourrait trouver un autre théorème fondé sur la condition de la réalité des racines de l'équation du troisième degré. Et en général, si on employait les formules exprimant les conditions de la réalité des racines d'une équation du $n^{ième}$ degré, $(n < m)$ à une inconnue, on trouverait l'énoncé d'un théorème analogue au précédent, qu'on démontrerait de la même manière. Sous le point de vue pratique, ce théorème donnerait lieu à des opérations d'autant plus laborieuses, que n serait plus voisin de m et que m serait plus grand.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LE RAYON DE COURBURE DE L'ELLIPSE;

PAR M. LOUIS-FERNANDEZ PASALAGUA.

On connaît (*voir* BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 535) l'expression remarquable du rayon de courbure de l'ellipse

$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{\cos^3\varphi},$$

φ désignant l'angle de la normale au point considéré (x, y) avec un des rayons vecteurs issus des foyers. Or l'angle de la normale avec l'axe des x a pour tangente $\frac{a^2 y}{b^2 x}$, la tangente de l'angle avec l'axe des x du rayon vecteur issu du foyer de droite, par exemple, est $\frac{y}{x-c}$; donc

$$\tang\varphi = \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{a^2 y}{b^2 x}}{1 + \frac{a^2 y}{b^2 x}\frac{y}{x-c}} = \frac{-cy}{b^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2y^2}{b^4}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2-x^2-y^2}}.$$

L'expression (1) devient alors, en remplaçant $\cos\varphi$ par cette valeur et p par $\frac{b^2}{a}$,

$$(2) \qquad \rho = \frac{(a^2+b^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

si nous appelons a' la longueur du diamètre qui aboutit

au point considéré,

$$(3)\qquad \rho = \frac{(a^2 + b^2 - a'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Désignons par b' la longueur du diamètre conjugué, par ψ l'angle de ces deux diamètres. Nous aurons, en ayant égard au théorème d'Apollonius,

$$(4)\qquad \rho = \frac{b'^3}{ab} = \frac{b'^2}{a' \sin\psi}.$$

Cette expression permet de construire très-simplement le rayon de courbure en un point de l'ellipse, lorsqu'on connaît les longueurs du diamètre qui y passe OA' (*), et du diamètre conjugué OB'. Du point A' abaissons A'P perpendiculaire sur OB'. AP' est évidemment égal à $a' \sin\psi$. Décrivons de A' comme centre un cercle de rayon égal à b', et menons-lui la tangente PL. Si nous abaissons Lc perpendiculaire sur A'P, le point c est le centre de courbure, et A'C est, en grandeur et en position, le rayon de courbure de l'ellipse en A'.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 849

(voir 2e série, t. VII, p. 137);

PAR M. L. PAILLOTTE,
Étudiant à Montpellier.

On donne une ellipse, trouver : 1° le lieu des milieux des cordes normales ; 2° le lieu des pôles de ces normales ;

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

3° *la corde normale minimum ;* 4° *la corde normale qui détache le plus petit segment.*

(M. Collins, *The educational Times.*)

1° L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, l'équation de la normale en fonction de son coefficient angulaire est

$$(1) \qquad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}.$$

L'équation du diamètre correspondant aux cordes de direction m est

$$(2) \qquad y = -\frac{1}{m}\frac{b^2}{a^2}x.$$

Le lieu est défini par ces deux équations, et si l'on élimine le paramètre variable m entre celles-ci, on aura l'équation du lieu.

Le résultat de l'élimination donne

$$(3) \qquad (a^6 y^2 + b^6 x^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2)^2 = a^4 b^4 c^4 x^2 y^2.$$

Pour avoir aisément la forme du lieu représenté par cette équation (3), on transformera ses coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et l'on aura

$$\rho^2 = \frac{a^4 b^4 c^4 \sin^2\omega \cos^2\omega}{(a^2 \sin^2 \cos + b^2 \cos^2\omega)^2 (a^6 \sin^2\omega + b^6 \cos^2\omega)}.$$

Cette équation représente une rosace à quatre feuilles; ce lieu est symétrique par rapport aux axes de coordonnées OX, OY, et est tangent à ces mêmes axes.

Il est facile de voir que cette courbe est intérieure à l'ellipse. En effet, si l'on cherche l'équation aux ordonnées des points d'intersection de la courbe représentée par l'équation (3) et de l'ellipse dont l'équation est

$$(4) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

l'équation (3) devient, en tenant compte de cette dernière équation (4),

$$a^6 y^2 + b^6 x^2 = c^4 x^2 y^2,$$

et l'équation aux ordonnées est

$$c^4 y^4 + 2 b^4 c^2 y^2 + b^8 = 0,$$

équation qui n'a que des racines imaginaires.

2° Soient (α, β) les coordonnées du pôle de la corde normale

(1) $$y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}},$$

la polaire de ce point par rapport à l'ellipse aura pour équation

(2) $$\frac{\alpha}{a^2} x + \frac{\beta}{b^2} y - 1 = 0.$$

Les équations (1) et (2), représentant la même droite, doivent être identiques, ce qui fournit les deux relations

(3) $$\frac{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}{a^2 \beta} = - \frac{m \sqrt{a^2 + m^2 b^2}}{b^2 \alpha} = \frac{c^2 m}{a^2 b^2}.$$

Éliminant le paramètre variable m entre ces deux dernières équations, on a l'équation du lieu.

Cette équation est

$$a^6 y^2 + b^6 x^2 = c^4 x^2 y^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{a^6 \sin^2 \omega + b^6 \cos^2 \omega}{c^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}.$$

Ce lieu est une courbe à centre et à quatre branches infinies dont les asymptotes sont représentées par les équa-

tions

$$x = \pm \frac{a^3}{c^2}, \quad y = \pm \frac{b^3}{c^2}.$$

On voit que ces asymptotes sont extérieures à l'ellipse, et on les construira facilement en s'aidant de la construction connue relative aux directrices de l'ellipse.

L'inclinaison du rayon vecteur minimum est

$$\tang \omega = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

et la longueur de ce rayon est

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2}.$$

On voit que ce rayon, dans l'angle XoY, se trouve à gauche de la diagonale du rectangle formé par les quatre asymptotes, puisque le coefficient angulaire de cette diagonale est $\frac{b^3}{a^3}$, quantité inférieure à $\sqrt{\frac{b^3}{a^4}}$, dans le cas de l'ellipse.

Au point M où le rayon vecteur minimum rencontre la courbe, on pourra facilement construire la tangente, qui est perpendiculaire à ce rayon.

Remarque I. — La recherche du lieu précédent revient à la recherche de celui-ci : Trouver le lieu des points tels, qu'en menant de ces points des tangentes à l'ellipse, l'une d'elles soit perpendiculaire à la corde des contacts; en d'autres termes, par chaque point de l'ellipse on mène une normale, et par les deux points d'intersection de cette normale avec l'ellipse on mène les tangentes : trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Remarque II. — Si l'on considère une ellipse con-

centrique à la première, et dont les axes soient respectivement $\left(2\frac{a^3}{c^2}\right)$, $\left(2\frac{b^3}{c^2}\right)$, et qu'on cherche le lieu du milieu de la portion de tangente à cette ellipse comprise entre les deux axes de coordonnées oX, oY, on trouve le même lieu.

3° Cherchons les équations aux abscisses et aux ordonnées des points d'intersection de la normale

$$(1) \qquad y = mx + \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + m^2 b^2}}$$

avec l'ellipse

$$(2) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Ces équations, une fois formées, on aura facilement la fonction

$$\delta^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2,$$

(x', y'), (x'', y'') étant les coordonnées des points communs à la normale et à l'ellipse. On trouve, toutes réductions faites,

$$\delta^2 = \frac{4a^4 b^4 (m^2 + 1)^3}{(a^2 + b^2 m^2)(a^2 m^2 + b^2)^2}.$$

Égalant à zéro le numérateur de la dérivée, on obtient une équation qui est vérifiée pour $m = 0$ et pour $m^2 = \frac{c^2 + a^2}{c^2 + b^2}$.

Le numérateur est toujours positif; pour que m soit réel, c'est-à-dire pour qu'il y ait un minimum correspondant à cette valeur, il faut qu'on ait $c > b$, et dans ce cas il y a un minimum correspondant à $m = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c^2 - b^2}}$.

Si $c < b$, la dérivée ne change de signe que pour $m = 0$, ce qui correspond au grand axe; elle s'annule encore pour $m = \infty$, ce qui donne le petit axe.

4° Je considère l'ellipse rapportée à un système de dia-

mètres conjugués oX', oY', dont l'un des axes oY' est parallèle à la normale qui détache le plus petit segment.

Soient a', b', θ les éléments de ce système de diamètres conjugués ; en désignant par S le segment elliptique, nous aurons, d'après une formule connue,

$$(1) \qquad S = \frac{b'}{a'}\sin\theta s,$$

s étant le segment circulaire correspondant au segment elliptique S, dans le cercle de rayon a'.

En calculant s, on trouve

$$s = a'^2 \arcsin\frac{\sqrt{a'^2 - x^2}}{a'} - x\sqrt{a'^2 - x^2}.$$

La relation (1) peut donc s'écrire

$$(1') \qquad S = \frac{b'}{a'}\sin\theta\left(a'^2\arcsin\frac{\sqrt{a'^2 - x^2}}{a'} - x\sqrt{a'^2 - x^2}\right).$$

Exprimons qu'au point (x, y), la normale à l'ellipse

$$a'^2 y'^2 + b'^2 x^2 - a'^2 b'^2 = 0$$

est parallèle à oY', nous aurons la condition

$$(2) \qquad x^2 = \frac{a'^4 \cos^2\theta}{b'^2 + a'^2\cos^2\theta}.$$

Les théorèmes d'Apollonius donnent les deux autres relations

$$(3) \qquad d^2 = a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

$$(4) \qquad ab = a'b'\sin\theta.$$

Calculant les valeurs de x, a', $\sin\theta$ à l'aide des équations (2), (3), (4), et portant ces valeurs dans (1'), on a

$$S = ab\left[\arcsin\frac{b'^2}{\sqrt{d^4 b'^2 - a^2 b^2}} - \frac{b'^2\sqrt{(d^2 - b'^2)b'^2 - a^2 b^2}}{d^2 b'^2 - a^2 b^2}\right].$$

Prenant la dérivée de S par rapport à b' et égalant à zéro

le numérateur de cette dérivée, on trouvera

$$\delta'^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Par suite, on a

$$S = ab\left[\arcsin\left(\frac{2ab}{d^2} - \frac{2abc^2}{d^4}\right)\right].$$

On calculera $\tan\theta$, et à l'aide de la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{a^2}{c^2}\left(m + \frac{b^2}{a^2 m}\right)$$

que donne l'angle de deux diamètres conjugués, il sera facile d'avoir la direction de la normale correspondante.

Remarque. — Cette méthode aurait pu être employée pour la recherche de la plus petite normale inscrite dans l'ellipse. On aurait eu immédiatement δ; car dans ce cas $\delta = 2y$, y étant l'ordonnée du point où la normale à l'ellipse est parallèle à oY'. Des calculs semblables à ceux que nous avons effectués plus haut donneraient

$$\delta^2 = 4\frac{b'^6}{d^2b'^2 - a^2b^2},$$

et pour la longueur de la normale minimum

$$\delta^2 = 27\frac{a^4b^4}{d^6}.$$

Note. — M. Kaber Bey a résolu la même question en employant l'angle excentrique.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Haton de la Goupillière à M. Gerono.

« Monsieur et cher maître,

» Vous paraîtrait-il hors de propos, au moment où les Cours vont recommencer, d'insérer, au milieu de vos

intéressants articles, une simple remarque sur un point de l'enseignement élémentaire qui me semble insuffisant dans son état actuel, à en juger du moins par les réponses uniformes des candidats dans les examens.

» Je veux parler de l'élégante démonstration indiquée par Sturm pour obtenir le maximum de l'expression $x^p y^q z^r$ (pour nous borner au cas de trois facteurs, ce qui ne particularise en rien), lorsque la somme des quantités positives x, y, z conserve une valeur constante a. On rattache cette recherche à celle du maximum du produit $\alpha\beta\gamma\delta\ldots\lambda$, dans lequel $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\lambda$ reste également constant. Et, pour celle-ci, on se fonde sur le principe démontré directement pour deux facteurs, en remplaçant $\alpha\beta$ par $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$ sans modifier les valeurs de $\gamma, \delta, \ldots, \lambda$.

» Or s'il est bon, en général, pour soulager l'esprit, de scinder en propositions successives toute question un peu compliquée, il n'en doit pas moins être toujours possible de présenter le raisonnement d'un seul coup et dans son entier. Si l'on essaye, dans le calcul actuel, de faire cette démonstration directement sur l'expression suivante, que l'on substitue à la proposée,

$$\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\underline{\frac{x}{p}\cdot\frac{y}{q}}\cdot\frac{y}{q}\cdots\frac{y}{q}\cdot\frac{z}{r}\cdot\frac{z}{r}\cdots\frac{z}{r},$$

en remplaçant les deux facteurs soulignés $\frac{x}{p}$ et $\frac{y}{q}$ chacun par leur moyenne arithmétique

$$\frac{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}}{2},$$

sans altérer la valeur des autres, on se heurte contre une impossibilité radicale, puisqu'un certain nombre de ces

facteurs sont nécessairement identiques à ceux que l'on veut modifier. Le raisonnement me paraît dès lors tout à fait dénué de fondement, et sa conclusion gratuite par conséquent.

» Voici l'explication qu'il me paraîtrait nécessaire d'ajouter sur ce point. L'expression

$$(1) \qquad \alpha.\beta.\gamma.\delta\ldots\lambda,$$

composée de $p+q+r$ facteurs, comme la suivante :

$$(2) \qquad \left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\frac{y}{q}\right)^q \left(\frac{z}{r}\right)^r,$$

est plus générale que cette dernière lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont considérés comme indépendants (sauf la condition de leur somme), car ces facteurs peuvent alors être tous différents, tandis que ceux du second produit ne présentent jamais que trois valeurs distinctes répétées p, q, r fois. En même temps, il n'est aucun des états de la fonction (2) que ne puisse évidemment affecter la première. Celle-ci passe donc en particulier par le maximum de (2) sans qu'on puisse *à l'avance* affirmer réciproquement que (2) atteigne le maximum de (1), et qu'il suffise, par suite, de déterminer ce dernier par la méthode ordinaire pour l'appliquer tel quel à l'expression (2). Il faut, au contraire, après avoir effectué cette détermination, s'assurer que le résultat correspond bien à l'une des formes que le produit (2) est susceptible de prendre parmi celles de (1), et non à l'une de celles en beaucoup plus grand nombre qu'il ne saurait présenter.

» Or, quand on dispose de l'entière indépendance de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, on reconnaît, par la méthode reçue, qui est alors tout à fait légitime, que le maximum de (1) correspond à l'égalité de tous les facteurs. Rien ne s'oppose d'ailleurs, dans les conditions du second problème, à ce

qu'on adopte pour x, y, z les valeurs déterminées par les trois relations qui expriment cette égalité :

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}, \quad p\frac{x}{p}+q\frac{y}{q}+r\frac{z}{r}=a.$$

On voit donc que l'expression (2) peut affecter en particulier l'état qui constitue le maximum de la première (*), et comme elle ne saurait offrir d'autres formes que celles de (1) lui-même, il s'ensuit qu'elle ne peut dépasser cette valeur, qui est bien dès lors son maximum. »

RECTIFICATION.

Page	390,	ligne	20, *ajoutez* page 250.
»	395	»	7 en remontant, *effacez* $\frac{1}{4}$.
»	396	»	4 en remontant, *au lieu de* un, *lisez* le.
»	396	»	3 en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{2}$, *lisez* $\frac{1}{4}$.
»	402	»	5 *au lieu de* — 20, *lisez* + 20.
»	402	»	8 en remontant, *au lieu de* 150*m*, *lisez* 190*m*.
»	476	»	14 en rem., *au lieu de* ouvrages, *lisez* usages.
»	480	»	3, *au lieu de* faire une, *lisez* faire apprendre une.

(*) S'il est nécessaire d'insister encore pour bien faire comprendre la nécessité de cette observation, remarquons que si, au lieu de réclamer l'égalité des facteurs, la démonstration relative à l'équation (1) eût conduit à toute autre condition impliquant l'inégalité de tous ces facteurs, comme une progression arithmétique ou n'importe quelle autre hypothèse on voudra imaginer, cette combinaison eût été irréalisable avec la fonction (2), puisque ses facteurs sont nécessairement égaux entre eux par groupes de p, q, r. Alors le défaut de la marche que je critique eût été mis en évidence par l'impossibilité même de son résultat. Elle n'en est pas plus concluante en réalité, bien que ce résultat soit par le fait applicable au produit (2), à moins qu'on n'ait soin de le constater expressément comme nous l'avons fait. Cette constatation, par conséquent, quoique tellement simple, qu'on ait pu longtemps oublier de la mentionner, n'en est pas moins une partie absolument essentielle du raisonnement.

DISCUSSION DE L'INTERSECTION DE DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 481);

PAR M. L. PAINVIN.

---

§ IV. — *L'équation en λ a deux racines égales.*

14. *Lorsque l'équation en λ a deux racines égales, les deux surfaces se touchent en un point unique, si le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit; les deux surfaces seront bitangentes et se couperont suivant deux courbes planes, si le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts; la droite qui joint les points de contact (c'est-à-dire l'intersection des deux plans) n'appartient pas aux deux surfaces.*

Réciproquement, *lorsque les deux surfaces sont tangentes ou doublement tangentes, l'équation en λ a deux racines égales : dans le premier cas, le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit; dans le second cas, où l'on suppose que la droite des contacts n'est pas une droite commune aux deux surfaces, le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts.*

L'énoncé suivant plus détaillé fera mieux saisir la position relative des deux surfaces.

PREMIER CAS. — *Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit.*

Soient A le sommet du cône correspondant à la racine

double, B et C les sommets des cônes correspondant aux deux racines simples :

1° *Les deux surfaces* S *et* T *se touchent au point* A; *les sommets* B *et* C *des deux cônes, correspondant aux racines simples, sont dans le plan tangent commun aux deux surfaces. Les points de contact des plans tangents, menés à chacune des surfaces par la droite* BC, *sont en ligne droite avec le sommet* A; *soit* AD *cette droite.*

2° *Les trois points* A, B, C *ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; le plan polaire du point* A *est le plan tangent commun* BAC; *les plans polaires des points* B *et* C *sont respectivement les plans* CAD *et* BAD. *Il n'y a que ces trois points qui aient même plan polaire par rapport aux deux surfaces.*

3° *Le cône* (A), *correspondant à la racine double, est conjugué par rapport au trièdre formé par les trois plans qui ont même pôle par rapport aux deux surfaces; les arêtes de ce trièdre sont les droites* AB, AC, AD *précédemment définies. Les cônes ayant leurs sommets en* B *et* C *touchent le plan tangent commun* BAC; BA *et* CA *sont respectivement les génératrices de contact.*

Lorsqu'un plan tourne autour de BC, *ses pôles, distincts par rapport à chacune des deux surfaces, se meuvent sur* AD, *et inversement. Lorsqu'un plan tourne autour de* AC, *ses pôles, distincts par rapport à chacune des surfaces, se meuvent sur* AB, *et inversement.*

4° *La courbe d'intersection des deux surfaces est une courbe gauche du quatrième ordre ayant un point double au point où les deux surfaces se touchent; les tangentes en ce point double sont les intersections du plan tangent commun avec le cône correspondant à la racine double; ces tangentes sont conjuguées harmoniques par*

rapport aux droites qui joignent le point double aux sommets des deux autres cônes. Le point double de la courbe gauche ne peut pas devenir un point de rebroussement, tant que l'équation en λ *n'a que deux racines égales. Le point double est isolé lorsque le plan* BAC *coupe le cône* (A) *suivant deux génératrices imaginaires.*

Deuxième cas. — *Le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts.*

1° *Les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes et se touchent en deux points situés sur la droite d'intersection des deux plans; cette droite n'est pas située sur les surfaces.*

Soient ABC et ABD les plans des deux courbes, A et B les points où les deux surfaces se touchent, CDA et CDB les plans tangents communs.

2° *Les cônes, correspondant aux racines simples, ont leurs sommets sur la droite* CD, *intersection des plans tangents communs, soient* C_1 *et* D_1; *les plans qui passent par les sommets* C_1 *et* D_1 *et par la droite* AB *des contacts forment un système harmonique par rapport aux deux plans* ABC *et* ABD *des courbes communes. Les cônes* (C_1) *et* (D_1) *touchent à la fois les plans tangents communs* CDA *et* CDB; *les plans de contact sont précisément les plans* C_1AB *et* D_1AB.

3° *Un point quelconque de la corde des contacts,* AB, *a même plan polaire par rapport aux deux surfaces, et ces plans passent tous par la droite* CD, *intersection des deux plans tangents communs.*

Les sommets des deux cônes, correspondant aux racines simples, ont même plan polaire par rapport aux deux surfaces; les plans polaires des points C_1 *et* D_1 *sont respectivement les plans* D_1AB *et* C_1AB.

Les plans polaires d'un point quelconque, pris sur CD *intersection des plans tangents communs, sont différents pour chacune des surfaces, mais ils passent tous par la droite* AB.

15. Je vais démontrer toutes les propositions renfermées dans l'énoncé qui précède. Je ferai d'abord observer que, dans cette étude et dans les suivantes, je ne m'occuperai plus de la distinction entre les solutions réelles et les solutions imaginaires.

Reportons-nous aux équations générales (1), (2), (3), (4) du n° 1, et supposons que l'équation en λ (4) possède une racine double λ_0; nous prendrons le sommet du cône correspondant comme sommet A du tétraèdre de référence; l'équation de ce cône ne devra plus renfermer de terme en x; or cette équation se déduit de l'équation (3), n° 1, en y faisant $\lambda = \lambda_0$; on devra donc avoir

$$(1) \qquad \frac{A_{11}}{B_{11}} = \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{A_{13}}{B_{13}} = \frac{A_{14}}{B_{14}} = -\lambda_0.$$

L'équation du cône est alors

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A_{22} + \lambda_0 B_{22}) y^2 + (A_{33} + \lambda_0 B_{33}) z^2 \\ \quad + (A_{44} + \lambda_0 B_{44}) t^2 + 2 (A_{23} + \lambda_0 B_{23}) yz \\ \quad + 2 (A_{24} + \lambda_0 B_{24}) yt + 2 (A_{34} + \lambda_0 B_{34}) zt = 0, \end{array} \right.$$

et l'équation en λ devient

$$(3) \quad (\lambda - \lambda_0) \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21}(\lambda - \lambda_0) & A_{22} + \lambda B_{22} & A_{23} + \lambda B_{23} & A_{24} + \lambda B_{24} \\ B_{31}(\lambda - \lambda_0) & A_{32} + \lambda B_{32} & A_{33} + \lambda B_{33} & A_{34} + \lambda B_{34} \\ B_{41}(\lambda - \lambda_0) & A_{42} + \lambda B_{42} & A_{43} + \lambda B_{43} & A_{44} + \lambda B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

La racine λ_0 devant être une racine double de l'équation (3), le multiplicateur de $(\lambda - \lambda_0)$ devra s'annuler

pour $\lambda = \lambda_0$; on trouve ainsi la condition

$$(4) \qquad B_{11} \begin{vmatrix} A_{22} + \lambda_0 B_{22} & A_{23} + \lambda_0 B_{23} & A_{24} + \lambda_0 B_{24} \\ A_{32} + \lambda_0 B_{32} & A_{33} + \lambda_0 B_{33} & A_{34} + \lambda_0 B_{34} \\ A_{42} + \lambda_0 B_{42} & A_{43} + \lambda_0 B_{43} & A_{44} + \lambda_0 B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation se décompose en deux; en égalant à zéro le premier facteur, le cône (2) reste un cône proprement dit; mais si l'on égale à zéro le second facteur, on a précisément la condition pour que le cône (2) se réduise à deux plans distincts.

Remarquons de suite que, dans le cas actuel, le cône (2) ne peut pas se réduire à deux plans coïncidents; en effet, eu égard à la relation (4), l'équation (3) en λ peut s'écrire :

$$(5) \qquad (\lambda - \lambda_0)^2 \left\{ B_{12} \begin{vmatrix} B_{21} & A_{23} + \lambda B_{23} & A_{24} + \lambda B_{24} \\ B_{31} & A_{33} + \lambda B_{33} & A_{34} + \lambda B_{34} \\ B_{41} & A_{43} + \lambda B_{43} & A_{44} + \lambda B_{44} \end{vmatrix} - B_{13} \begin{vmatrix} B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} & A_{24} + \lambda B_{24} \\ B_{31} & A_{32} + \lambda B_{32} & A_{34} + \lambda B_{34} \\ B_{41} & A_{42} + \lambda B_{42} & A_{44} + \lambda B_{44} \end{vmatrix} + B_{14} \begin{vmatrix} B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} & A_{23} + \lambda B_{23} \\ B_{31} & A_{32} + \lambda B_{32} & A_{33} + \lambda B_{33} \\ B_{41} & A_{42} + \lambda B_{42} & A_{43} + \lambda B_{43} \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Or, pour que le cône (2) se réduise à deux plans coïncidents, on devrait avoir

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{A_{22} + \lambda_0 B_{22}}{A_{23} + \lambda_0 B_{23}} = \dfrac{A_{23} + \lambda_0 B_{23}}{A_{33} + \lambda_0 B_{33}} = \dfrac{A_{24} + \lambda_0 B_{24}}{A_{34} + \lambda_0 B_{34}}, \\[2ex] \dfrac{A_{22} + \lambda_0 B_{22}}{A_{24} + \lambda_0 B_{24}} = \dfrac{A_{23} + \lambda_0 B_{23}}{A_{34} + \lambda_0 B_{34}} = \dfrac{A_{24} + \lambda_0 B_{24}}{A_{44} + \lambda_0 B_{44}}. \end{cases}$$

Mais on voit alors que, eu égard aux relations (6), la

quantité entre parenthèses, dans l'équation (5), s'annule pour $\lambda = \lambda_0$; l'équation en λ aurait donc trois racines égales.

Ainsi nous n'avons à examiner que les deux cas suivants :

1° Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit;

2° Le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans distincts.

I° *Le cône correspondant à la racine double est un cône proprement dit.*

16. Je prendrai pour tétraèdre de référence un tétraèdre dont trois des sommets seront : le point A, sommet du cône correspondant à la racine double; les points B et C, sommets des cônes correspondant aux deux racines simples; le quatrième sommet reste arbitraire.

Reprenons l'analyse du numéro précédent; exprimant d'abord que le cône, correspondant à la racine double, a son sommet en A, on a les relations

$$(1°) \qquad \frac{A_{11}}{B_{11}} = \frac{A_{12}}{B_{12}} = \frac{A_{13}}{B_{13}} = \frac{A_{14}}{B_{14}} = -\lambda_0;$$

puis, en écrivant que l'équation (3) en λ admet λ_0 pour racine double, on arrive à la relation (4), qui doit être vérifiée en égalant à zéro le premier facteur; on a ainsi

$$(2°) \qquad B_{11} = 0, \quad \text{d'où} \quad A_{11} = 0,$$

puisque λ_0 n'est ni nul ni infini.

Si maintenant λ_1 est la première des racines simples, le cône correspondant doit avoir son sommet en B, c'est-à-dire que son équation [déduite de l'équation (3), n° 1, en y faisant $\lambda = \lambda_1$] ne doit pas renfermer de termes en y;

on conclut de là

(3°) $$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{A_{22}}{B_{22}} = \frac{A_{23}}{B_{23}} = \frac{A_{24}}{B_{24}} = -\lambda_1.$$

De même, le cône, correspondant à la racine simple λ_2, devant avoir son sommet en C, on aura

(4°) $$\frac{A_{31}}{B_{31}} = \frac{A_{32}}{B_{32}} = \frac{A_{33}}{B_{33}} = \frac{A_{34}}{B_{34}} = -\lambda_2.$$

Comparant les rapports (3° et (4°), on voit que

$$\frac{A_{23}}{B_{23}} = -\lambda_1, \quad \frac{A_{23}}{B_{23}} = -\lambda_2;$$

et comme λ_1 et λ_2 sont des racines distinctes, ni nulles, ni infinies, il en résulte

(5°) $$A_{23} = 0, \quad B_{23} = 0.$$

La comparaison des rapports (1°) et (3°), puis (1°) et (4°), nous donne encore

(6°) $$A_{12} = 0, \quad B_{12} = 0; \quad A_{13} = 0, \quad B_{13} = 0.$$

En ayant égard aux relations (1°), (2°), (3°), (4°), (5°), (6°), les équations (1) et (2), n° 1, des surfaces S et T, deviennent

(7) $$\left\{\begin{array}{ll} (S) & A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 \\ & \quad + 2A_{14}xt + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \\ (T) & \dfrac{A_{22}}{\lambda_1}y^2 + \dfrac{A_{33}}{\lambda_2}z^2 + B_{44}t^2 \\ & \quad + 2\dfrac{A_{14}}{\lambda_0}xt + 2\dfrac{A_{24}}{\lambda_1}yt + 2\dfrac{A_{34}}{\lambda_2}zt = 0. \end{array}\right.$$

Nous voyons déjà que le plan $t = 0$ est tangent aux deux surfaces en A, car il les coupe toutes deux suivant deux droites qui se rencontrent en A. Ainsi :

« Les deux surfaces se touchent en A ; ce point A est
» le sommet du cône correspondant à la racine double,
» et les sommets B, C, des deux cônes correspondant aux
» racines simples sont dans le plan tangent commun aux
» deux surfaces. »

Le plan polaire du point B est $f'_y = 0$; on trouve pour les deux surfaces

$$A_{22}y + A_{24}t = 0;$$

ce plan est donc le même pour les deux surfaces et passe par l'arête AC; nous pouvons le prendre pour plan ACD du tétraèdre de référence, ce qui revient à supposer

$$(7^\circ) \qquad A_{24} = 0;$$

d'ailleurs on ne peut pas admettre que A_{22} soit nul, car alors les équations (7) représenteraient des cônes, et l'équation en λ aurait des racines nulles ou infinies. Le plan polaire du point C est $f'_z = 0$; on trouve pour les deux surfaces

$$A_{33}z + A_{34}t = 0;$$

ce plan est encore le même pour les deux surfaces et passe par l'arête AB; nous pouvons le prendre pour plan ABD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$(8^\circ) \qquad A_{34} = 0.$$

Le coefficient A_{14} ne peut pas être nul, car les équations (7) représenteraient deux cônes ayant même sommet, en ayant égard aux relations (7°) et (8°). Ainsi, dans l'hypothèse actuelle, *les équations des deux surfaces pourront se mettre sous la forme définitive*

$$(8) \qquad \begin{cases} (S) & by^2 + cz^2 + dt^2 + 2xt = 0, \\ (T) & b_1y^2 + c_1z^2 + d_1t^2 + 2xt = 0. \end{cases}$$

L'équation en λ, correspondant aux équations (8), est

(9) $$(\lambda+1)^2(b_1+\lambda b)(c_1+\lambda c)=0,$$

et les équations des trois cônes sont

(10) $$\left\{\begin{array}{l}(\text{A})\ (b-b_1)y^2+(c-c_1)z^2+(d-d_1)t^2=0,\\ \qquad\text{correspondant à la racine double;}\\ (\text{B})\ (b_1c-bc_1)z^2+(b_1d-bd_1)t^2+2(b_1-b)xt=0,\\ (\text{C})\ (c_1b-cb_1)y^2+(c_1d-cd_1)t^2+2(c_1-c)xt=0,\\ \qquad\text{correspondant aux racines simples.}\end{array}\right.$$

17. Les plans

$$dt+2x=0,\quad d_1t+2x=0$$

sont respectivement tangents aux surfaces (8), et les points de contact sont évidemment sur l'arête AD; ainsi :

« Les points de contact des plans tangents, menés à » chacune des surfaces par la droite BC, sont en ligne » droite avec le point A où les deux surfaces se tou- » chent. »

C'est sur cette droite AD que l'on place le quatrième sommet D du tétraèdre de référence; sa position sur cette droite reste d'ailleurs arbitraire.

« Les trois points A, B, C ont même plan polaire par » rapport aux deux surfaces; le plan polaire du point A » est le plan tangent commun BAC; le plan polaire du » point B est le plan CAD; le plan polaire du point C » est le plan BAD. »

Ces propositions, déjà démontrées, se concluent immédiatement des équations (8); j'ajoute que

« Les trois points A, B, C sont les seuls qui aient » même plan polaire par rapport aux deux surfaces. »

Car, en identifiant les équations des plans polaires

d'un point (x_0, y_0, z_0, t_0), on a

$$\frac{t_0}{t_0} = \frac{by_0}{b_1 y_0} = \frac{cz_0}{c_1 z_0} = \frac{dt_0 + x_0}{d_1 t_0 + x_0}:$$

on verra sans difficulté que ces équations ne donnent que les trois points A, B, C, car les constantes b, c sont essentiellement différentes des constantes b_1, c_1, autrement l'équation en λ (9) aurait trois racines égales.

Les équations (10) mettent en évidence les propriétés suivantes :

« Le cône correspondant à la racine double est con- » jugué par rapport au trièdre formé par les trois plans » qui ont même pôle par rapport aux deux surfaces; les » arêtes de ce trièdre sont : les droites qui joignent le som- » met (A) aux deux autres sommets (B) et (C) corres- » pondant aux racines simples, et la droite AD sur la- » quelle se trouvent les points de contact des plans tan- » gents menés par la droite BC. »

« Les cônes ayant leurs sommets en B et C sont res- » pectivement tangents au plan tangent commun BAC; » BA et CA sont les génératrices de contact. »

On constatera immédiatement, à l'aide des équations (8), que :

« Lorsqu'un plan tourne autour de BC, ses pôles, dis- » tincts par rapport à chacune des surfaces, décrivent la » droite AD, et inversement ; »

« Lorsqu'un plan tourne autour de AB, ses pôles, dis- » tincts par rapport à chacune des surfaces, décrivent la » droite AC, et inversement.

18. Il nous reste enfin à démontrer la proposition suivante :

« La courbe d'intersection des deux surfaces est une » courbe du quatrième ordre ayant un point double au » point où les deux surfaces se touchent ; les tangentes

» en ce point double sont les intersections du plan tan-
» gent commun avec le cône correspondant à la racine
» double de l'équation en λ; ces tangentes sont conju-
» guées harmoniques par rapport aux droites qui joignent
» le point double aux sommets des deux autres cônes. Le
» point double de la courbe gauche ne peut pas devenir
» un point de rebroussement tant que l'équation en λ n'a
» que deux racines égales. »

L'équation du cône correspondant à la racine double est, n° 16,

$$(11) \qquad (b - b_1)y^2 + (c - c_1)z^2 + (d - d_1)t^2 = 0;$$

un plan quelconque passant par le sommet A aura pour équation

$$y = mz + nt;$$

il coupera les deux surfaces (8) suivant des courbes respectivement situées sur les cônes

$$(12)\left\{\begin{aligned} &(bm^2 + c)z^2 + (bn^2 + d)t^2 + 2\,bmn\,zt + 2xt = 0,\\ &(b_1m^2 + c_1)z^2 + (b_1n^2 + d_1)t^2 + 2\,b_1mn\,zt + 2xt = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces deux cônes touchent le plan BAC, ou $t = 0$, suivant l'arête BA ; par conséquent un plan quelconque passant par le point A coupe les deux surfaces suivant deux courbes qui se touchent en A, la tangente commune est dans le plan BAC; en d'autres termes, un plan quelconque passant par le point A y rencontre la courbe gauche, intersection de deux surfaces S et T, en deux points coïncidant avec le point A ; donc A est un *point double* pour cette courbe gauche.

Le cône (11) passe par cette courbe ; les génératrices de ce cône, situées dans le plan $t = 0$, rencontreront la courbe en trois points coïncidents, car tout plan passant par une de ces génératrices coupera les deux surfaces sui-

vant deux coniques osculatrices; pour constater ce dernier fait, on remarque que les génératrices en question sont

$$(13) \qquad t = 0, \quad (b - b_1) y^2 + (c - c_1) z^2 = 0;$$

si alors on fait $m = \sqrt{\dfrac{c - c_1}{b_1 - b}}$, et si l'on assimile les équations (12) à celles de deux coniques, l'équation en μ qui correspond aux sécantes communes, est

$$(\mu + 1)^2 [(b + \mu b_1) m^2 + c + \mu c_1] = 0,$$

ou, en remplaçant m par sa valeur,

$$(\mu + 1)^3 = 0;$$

cette équation ayant ses trois racines égales, les cônes (12) sont osculateurs.

Ainsi les droites (13) sont bien les tangentes au point double; ces deux droites forment évidemment un système harmonique par rapport aux droites AB et AC, c'est-à-dire $z = 0$ et $y = 0$.

Pour que le point double A soit un point de rebroussement de la courbe gauche, il faudrait que les deux tangentes (13) se confondissent, c'est-à-dire que l'on eût

$$b_1 = b \quad \text{ou} \quad c_1 = c;$$

mais alors l'équation (9) en λ posséderait trois racines égales, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le point double A est un *point isolé*, lorsque le plan tangent commun coupe le cône correspondant à la racine double suivant deux génératrices imaginaires.

Remarque. — La réciproque énoncée au n° **14** se démontrera facilement en prenant le point de contact des deux surfaces pour un des sommets du tétraèdre de référence, et le plan tangent commun pour une des faces adjacentes à ce sommet, etc., etc.

II° *Le cône correspondant à la racine double se compose de deux plans distincts.*

19. J'ai déjà remarqué que ces deux plans ne peuvent pas se confondre (n° 15); on peut donc les prendre pour plans ABC et ABD du tétraèdre de référence. Reportons-nous aux équations (1), (2), (3) du n° 1; si λ_0 est la racine double, l'équation (3), où l'on remplace λ par λ_0, ne devra renfermer que le terme en zt, puisque cette équation doit représenter les deux plans ABC et ABD ou $t=0$ et $z=0$; on aura donc

$$\frac{A_{11}}{B_{11}}=\frac{A_{22}}{B_{22}}=\frac{A_{33}}{B_{33}}=\frac{A_{44}}{B_{44}}=\frac{A_{12}}{B_{12}}$$
$$=\frac{A_{13}}{B_{13}}=\frac{A_{14}}{B_{14}}=\frac{A_{23}}{B_{23}}=\frac{A_{24}}{B_{24}}=-\lambda_0.$$

Les équations des deux surfaces pourront alors s'écrire

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}
&(S)\quad A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2\\
&\qquad\qquad +2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{14}xt\\
&\qquad\qquad +2A_{23}yz+2A_{24}yt+2A_{34}zt=0,\\
&(T)\quad A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+A_{44}t^2\\
&\qquad\qquad +2A_{12}xy+2A_{13}xz+2A_{14}xt\\
&\qquad\qquad +2A_{23}yz+2A_{24}yt+2B_{34}zt=0;
\end{aligned}\right.$$

l'équation en λ est, dans le cas actuel,

$$(15)\quad(\lambda+1)^2\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13}(\lambda+1) & A_{14}(\lambda+1)\\
A_{21} & A_{22} & A_{23}(\lambda+1) & A_{24}(\lambda+1)\\
A_{31} & A_{32} & A_{33}(\lambda+1) & B_{34}+\lambda A_{34}\\
A_{41} & A_{42} & B_{34}+\lambda A_{34} & A_{44}(\lambda+1)
\end{vmatrix}=0.$$

La droite AB rencontre les deux surfaces aux deux mêmes points; car si l'on fait $z=0$, $t=0$, dans les équa-

tions (14), il vient

$$(16) \qquad A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = 0;$$

les plans tangents en ces points $(x_0, y_0, z_0 = 0, t_0 = 0)$ ont pour équation

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_0(A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t) \\ \quad + y_0(A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24}t) = 0; \end{array} \right.$$

ces plans tangents sont aussi les mêmes pour les deux surfaces; donc les deux surfaces sont bitangentes.

Les deux points (16) sont distincts, car s'ils étaient coïncidents, on pourrait supposer A_{12} et A_{22} nuls, et on voit alors que l'équation en λ (15) aurait trois racines égales. Nous pouvons donc prendre les deux points (16) pour sommets A et B du tétraèdre de référence, ce qui revient à supposer

$$(1^\circ) \qquad A_{11} = 0, \quad A_{22} = 0.$$

Les plans tangents aux points A et B sont alors, d'après l'équation (17) et les relations (1°),

$$(18) \quad A_{12}y + A_{13}z + A_{14}t = 0, \quad A_{21}x + A_{23}z + A_{24}t = 0.$$

Or ces plans ne passent pas par la droite AB; car s'ils passaient par cette droite, on aurait $A_{12} = 0$, et l'équation en λ (15) aurait quatre racines égales. Nous pouvons donc prendre les deux plans (18) pour faces ACD et BCD du tétraèdre de référence, c'est-à-dire supposer

$$(2^\circ) \qquad A_{13} = 0, \quad A_{14} = 0; \quad A_{23} = 0, \quad A_{24} = 0.$$

Nous concluons de là, en ayant égard aux relations (1°) et (2°) et en nous rappelant que A_{12} n'est pas nul, que *les équations des deux surfaces peuvent se ramener à la forme définitive*

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (S) & az^2 + bt^2 + 2xy + 2c\,zt = 0, \\ (T) & az^2 + bt^2 + 2xy + 2c_1 zt = 0. \end{array} \right.$$

L'équation générale des surfaces passant par les points communs aux surfaces (19) est

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} a(\lambda+1)z^2+b(\lambda+1)t^2 \\ \quad +2(\lambda+1)xy+2(c+\lambda c_1)zt=0, \end{array}\right.$$

et l'équation en λ est alors

$$(21)\qquad (\lambda+1)^2[ab(\lambda+1)^2-(c+\lambda c_1)^2]=0.$$

Si l'on prend pour λ les racines simples de l'équation (21), savoir :

$$\frac{c+\lambda c_1}{\lambda+1}=\pm\sqrt{ab},$$

les équations des cônes correspondants seront, d'après l'équation (20),

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{ll} (C_1) & az^2+bt^2+2xy+2\sqrt{ab}.zt=0, \\ (D_1) & az^2+bt^2+2xy-2\sqrt{ab}.zt=0; \end{array}\right.$$

équations qui peuvent s'écrire

$$(22\ bis)\quad \left\{\begin{array}{ll} (C_1) & (z\sqrt{a}+t\sqrt{b})^2+2xy=0, \\ (D_1) & (z\sqrt{a}-t\sqrt{b})^2+2xy=0. \end{array}\right.$$

Les sommets de ces deux cônes sont évidemment

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{llll} (C_1) & x=0, & y=0, & z\sqrt{a}+t\sqrt{b}=0, \\ (D_1) & x=0, & y=0, & z\sqrt{a}-t\sqrt{b}=0. \end{array}\right.$$

Nous voyons donc que :

« Si l'équation en λ a deux racines égales, et si le cône
» correspondant à la racine double se réduit à deux
» plans, les deux surfaces se coupent suivant deux cour-
» bes planes et se touchent en deux points situés sur la
» droite d'intersection des plans de ces deux courbes. »

Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second » ordre se coupent suivant deux courbes planes, ou » mieux, lorsqu'elles sont doublement tangentes et que » la corde des contacts n'appartient pas à ces surfaces, » l'équation en λ a deux racines égales, et deux seulement : le cône correspondant à la racine double se réduit à deux plans. »

Cette réciproque se démontrera sans difficulté en prenant les deux plans pour plans de coordonnées ou pour faces du tétraèdre de référence.

20. Les équations (22 *bis*) nous montrent que :

« Les cônes correspondant aux racines simples ont » leurs sommets sur l'intersection (D) des plans tangents » communs aux deux surfaces, et touchent à la fois ces » plans tangents communs; les plans de contact passent » par la droite AB et forment un système harmonique » par rapport aux plans ABC et ABD des deux courbes » planes communes. »

Les plans polaires, par rapport aux surfaces (19), d'un point quelconque (x_0, y_0, z_0, t_0), ont pour équations respectives :

$$(24)\quad \begin{cases} x_0 y + y_0 x + z_0(az + ct) + t_0(cz + bt) = 0, \\ x_0 y + y_0 x + z_0(az + c_1 t) + t_0(c_1 z + bt) = 0. \end{cases}$$

On constate immédiatement que :

« 1° Les plans polaires d'un même point se coupent » sur un plan passant par la droite AB. »

« 2° Un point quelconque de la corde des contacts AB » a même plan polaire par rapport aux deux surfaces, et » ces plans passent tous par l'intersection des deux plans » tangents communs. »

« 3° Les pôles des plans passant par la droite AB sont » distincts pour les deux surfaces. »

« 4° Les sommets des deux cônes correspondant aux » racines simples ont même plan polaire par rapport » aux deux surfaces; le plan polaire du sommet C_1 est » le plan D_1AB, et le plan polaire du sommet D_1 est le » plan C_1AB. »

« 5° Les plans polaires d'un point quelconque, pris » sur la droite CD, intersection des plans tangents com- » muns, sont différents pour chacune des surfaces; mais » ils passent tous par la corde des contacts, AB. »

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 866

(voir 2e série, t. VII, p. 236);

PAR M. LAISANT,
Capitaine du Génie.

Les différents points d'une courbe mobile engendrent une série de courbes dont l'enveloppe est la même que l'enveloppe de la courbe mobile. Exemple : l'enveloppe d'une droite de longueur constante, qui se meut entre deux droites rectangulaires, est la même que celle des ellipses engendrées par chacun des points de la droite mobile.

Le théorème général ne suppose pas que la courbe mobile ne se déforme pas pendant le mouvement.

(E. BARBIER.)

Lorsqu'une courbe a se meut dans un plan de façon à dessiner une enveloppe b, il est évident que le mouve-

ment peut être représenté par le roulement de la courbe a sur la courbe b, accompagné d'un certain glissement. Si l'on considère le mouvement élémentaire à partir d'une position quelconque des deux courbes, on voit par conséquent qu'il se décomposera en deux autres bien distincts :

1° Une rotation élémentaire autour d'un point infiniment voisin du point de contact, rotation dont l'amplitude α sera égale à la somme ou la différence des angles de contingence des courbes a et b, selon que ces courbes auront des courbures opposées ou non;

2° Une translation élémentaire suivant la tangente commune. Le point de contact M, en vertu du premier mouvement, éprouvera, perpendiculairement à la tangente, un déplacement égal à α multiplié par un infiniment petit du premier ordre: ce déplacement sera donc du deuxième ordre. En vertu du glissement élémentaire, le point M se déplacera au contraire suivant la tangente d'une quantité de premier ordre. Donc le premier déplacement disparaît devant le second, et l'élément de la trajectoire c décrite par le point M, considéré comme lié à la courbe a, se confond avec un élément de l'enveloppe b. Toutes les courbes telles que c sont donc tangentes à b, ce qui démontre le théorème en question.

On mettrait en évidence les raisonnements ci-dessus d'une façon plus frappante, mais non plus rigoureuse, en substituant aux courbes des polygones infinitésimaux dans lesquels les longueurs des côtés qui viennent s'appliquer l'un sur l'autre seraient différentes.

Rien ne suppose, du reste, dans ce qui précède, que l'angle de contingence de la courbe mobile est constant en un point donné. Pourvu que cet angle reste infiniment petit ainsi que celui de l'enveloppe, tout le raisonnement subsiste, de sorte que la courbe mobile peut se

déformer pendant son mouvement, comme l'indique l'énoncé.

Ceci établi, nous ferons les remarques suivantes :

1° Si l'enveloppe est dessinée par un simple mouvement de glissement, ce sera toujours le même point M de la courbe mobile qui sera au contact. Les divers points de cette courbe décriront à un même instant des éléments parallèles à la tangente commune. Donc, en général, les trajectoires de ces points n'auront pas d'enveloppe, et, en tout cas, on ne peut rien conclure. Exemple : Un cercle se meut en glissant sur une ligne droite sans tourner ; il dessine comme enveloppe le système de deux droites parallèles distinctes entre elles de la longueur du diamètre, et les divers points de la circonférence du cercle mobile tracent des droites parallèles aux deux premières, et n'ayant conséquemment pas d'enveloppe.

2° Si, au contraire, la courbe mobile roule sur son enveloppe sans glisser, le raisonnement ci-dessus doit être modifié, car le déplacement, qui était du premier ordre, devient identiquement nul ; celui du second ordre subsiste seul, et par suite au point considéré, la trajectoire et l'enveloppe se rencontrent à angle droit. Le théorème est donc en défaut jusqu'à un certain point dans ce cas-là ; car, au point M, la trajectoire c présentera en général un rebroussement, de sorte qu'on peut dire que cette courbe *touchera* encore l'enveloppe b dans l'acception vulgaire du mot, mais non dans le sens géométrique. Exemple : Un cercle roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon double a pour enveloppe ce dernier ; tous les points de la circonférence du cercle mobile décrivent alors des diamètres du cercle fixe qui viennent se terminer normalement sur la circonférence de celui-ci.

3° Si la courbe mobile roule en glissant sur certaines parties de son enveloppe et ne fait que rouler sur certaines

autres, le théorème sera vrai sans restriction pour les premières, et devra subir l'application de la remarque précédente pour les autres. Exemple : Un cercle a roule sur une droite b; il décrit comme enveloppe le système de la droite b et d'une droite b' parallèle à b et à une distance égale au diamètre; et le cercle, dans ce mouvement, roule et glisse à la fois sur b. Tous les points de la circonférence décrivent des cycloïdes qui ont b' pour enveloppe, et s'appuient normalement sur la droite b en leurs points de rebroussement.

4° Le même théorème est applicable, avec des restrictions analogues aux précédentes, au cas d'une courbe à double courbure qui se meut dans l'espace de façon à rester constamment tangente à une même courbe fixe. Ici encore la courbe mobile peut se déformer pendant le mouvement, sans que le théorème cesse d'être vrai.

Note. — M. Pellet, de Nîmes, a résolu la même question.

Question 867

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 286);

PAR M. P. WILLIÈRE.

A une hyperbole, on mène deux tangentes (A) *et* (B). *D'un autre point quelconque m de la courbe, on mène ensuite une parallèle à une asymptote, et l'on désigne par a, b, c les points de rencontre de cette parallèle avec les droites* (A), (B), (C). *Démontrer que mc est une moyenne proportionnelle entre ma et mb. Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, deux tangentes et un point.*

Solution. — Je désigne par A et B les points de contact des deux tangentes (A) et (B) avec l'hyperbole; la

droite parallèle à une asymptote menée par le point m rencontre la courbe en un second point situé à l'infini, que je désigne par ∞. Le rapport anharmonique des quatre points A, m, B, ∞ est constant. En prenant successivement pour sommet du faisceau les points A et B, et en comptant les segments sur la parallèle à l'asymptote, j'aurai

$$\frac{am.c\infty}{cm.a\infty} = \frac{cm.b\infty}{bm.c\infty},$$

ou

$$\frac{am}{cm} = \frac{cm}{bm}.$$

De la proportion précédente, on déduit

$$\frac{ac}{bc} = \frac{am}{cm},$$

et en supposant que le point m s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire que la parallèle à l'asymptote devienne l'asymptote elle-même, le second rapport devient l'unité, et par suite

$$ac = bc.$$

De là résulte la seconde propriété que : *la distance comprise entre les points d'intersection de deux tangentes à l'hyperbole avec une asymptote est divisée en deux parties égales par la corde des contacts.*

Cette propriété et la précédente permettent de construire facilement une hyperbole connaissant deux tangentes, une asymptote et un point. Car en menant une parallèle à l'asymptote par le point donné, la première propriété fournit sur cette parallèle un point de la corde des contacts, et la seconde propriété en fournit un second sur l'asymptote; la corde des contacts étant connue, on

pourra déterminer autant de points qu'on voudra de l'hyperbole.

Note. — M. L. Kiépert, étudiant de Mathématiques et de Physique à Berlin, a résolu la même question par le calcul en prenant l'équation de l'hyperbole sous la forme $xy = k^2$.

Nous avons aussi reçu des solutions analogues de MM. Brocard, sous-lieutenant de Génie à Metz; de Teyssière, élève de Sainte-Barbe; Julien Boulanger; Pellet, de Nîmes; C.L., maître répétiteur.

Nous ferons remarquer d'ailleurs que cette question a déjà été indiquée et résolue avec plusieurs autres par M. Page dans les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 65.

Question 873

(voir 2e série, t. VII, p. 237);

Par M. L. T. D,
Élève du lycée de Lyon.

Si, par un point O, *on mène trois lignes respectivement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique. Trouver son équation.* (S. Roberts.)

J'écarte le cas où le point O se trouverait sur l'un des côtés du triangle ou sur son prolongement. Alors les six points se réduiraient à cinq, dont trois en ligne droite; et aussi le cas où le point serait situé à l'un des sommets, car alors les six points se réduiraient à trois, les trois sommets eux-mêmes.

Cela posé, je placerai l'origine au point O, et je désignerai par

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

les équations des trois côtés du triangle. Chacune de ces équations peut être supposée de la forme

$$Px + Qy - 1 = 0.$$

Par conséquent les parallèles menées par O aux côtés auront pour équations respectivement

$$A + 1 = 0, \quad B + 1 = 0, \quad C + 1 = 0.$$

Je considère maintenant l'équation du second degré

$$BC + CA + AB + A + B + C + 1 = 0.$$

Il est facile de voir que la conique qu'elle représente passe par les six points considérés.

En effet, je cherche son intersection avec le côté $A = 0$; les points de rencontre se trouvent sur la courbe

$$0 = BC + B + C + 1 = (B + 1)(C + 1).$$

Ces points sont donc au nombre de deux, donnés par les systèmes d'équations

$$\begin{cases} A = 0, \\ B + 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0, \\ C + 1 = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes, la conique ci-dessus passe par les deux points de rencontre d'un côté du triangle avec les parallèles aux deux autres.

On démontrerait de même que cette conique passe par les quatre autres points indiqués dans l'énoncé.

Note. — Ont résolu la même question : MM. Lavigne, élève du lycée de Strasbourg; Lippmann, du lycée Napoléon; Pellet, du lycée de Nîmes; Georges de Villepin, du collége Stanislas; Griolet Henry, du lycée de Grenoble; A. Tournois, du lycée de Dijon; Willière, professeur à Arlon.

M. de Villepin s'appuie sur le théorème de Carnot relatif aux segments déterminés par les parallèles sur les côtés du triangle.

L'analyse de M. Griolet est fondée sur les propriétés des déterminants. Le problème est trop simple pour qu'on fasse usage d'une aussi puissante machine.

Question 887

(voir 2e série, t. VII, p. 240);

PAR M. ARNOYE,
Élève du lycée de Carpentras.

Étant donnés deux cercles qui se coupent orthogonalement, si l'on fait passer un cercle par leurs centres O *et* O' *et par leur point d'intersection* I, *la somme des puissances d'un point de cercle par rapport aux cercles donnés est nulle.*

Soit M un point du cercle passant par les points O et O' des cercles de rayons R, R' et leur point I d'intersection. Nommons d et d' les distances MO, MO'. La somme des puissances du point M par rapport aux deux cercles est

$$d^2 - R^2 + d'^2 - R'^2;$$

mais les triangles rectangles OMO, OAO' donnent

$$\overline{OO'}^2 = d^2 + d'^2 = R^2 + R'^2,$$

le théorème est donc démontré.

Note. — Ont résolu la même question à peu près de la même manière: MM. Honoré Pi; A. Jouffray, élève du lycée Louis-le-Grand; A. Tournon, du lycée de Dijon; Janin, du lycée de Grenoble; Jardé, du lycée Louis-le-Grand; Toubin, de Lons-le-Saulnier; Janin, de Sainte-Barbe; Piccioli; Conradt, étudiant à Berlin; C. L., maître répétiteur; Willière, professeur à Arlon.

Question 839.

Nota. — L'identité algébrique qui fait l'objet de la question 839, posée par M. J.-J.-A. Mathieu, est connue depuis très-longtemps; M. Chasles, dans la *Géométrie*

supérieure, en donne une démonstration, et désigne cette relation par le nom de *formule d'Euler*. Cette identité est, ainsi que l'ont remarqué tous nos correspondants, une conséquence immédiate de la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples; il nous paraît donc inutile de reproduire une démonstration devenue *classique*; nous ajouterons même que les candidats à l'École Polytechnique doivent la considérer comme une *question d'examen*.

Ce qui est moins connu peut-être de nos lecteurs, c'est que l'on peut facilement remonter de l'identité dont il s'agit à la formule de décomposition d'une fraction rationnelle.

Soit en effet une fraction irréductible $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, dans laquelle $f(x)$ est au plus du degré m, et $\varphi(x)$ le produit de $m+1$ facteurs linéaires : $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$. Posons $\Psi(x)=(x-\lambda)\varphi(x)$, nous pourrons appliquer l'identité dont nous nous occupons à la fraction $\frac{f(x)}{\Psi(x)}$, et il viendra

$$\frac{f(a)}{(a-\lambda)\varphi'(a)}+\ldots+\frac{f(l)}{(l-\lambda)\varphi'(l)}+\frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}=0,$$

ou bien

$$\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{f(a)}{(\lambda-a)\varphi'(a)}+\ldots+\frac{f(l)}{(\lambda-l)\varphi'(l)}.$$

Note. — Ont résolu cette question : MM. Graindorge; Porte, du lycée de Grenoble; de Virieu, professeur à Lyon; J. Barbier, du lycée de Grenoble (classe de M. Bernard); Aldacotche, étudiant à Metz; Heming, du lycée de Metz (classe de M. Reboul); Alfred Girard; Marais, de Berny, Doucet, du lycée de Lyon; J. Welsch et G. Herment, du lycée de Metz.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE (ANNÉE 1868).

Calcul logarithmique.

Dans le triangle ABC, le côté BC $= 8424^{m},572$; l'angle B $= 60^{\circ}45'28'',6$; l'angle C $= 42^{\circ}25'17''$: on demande de calculer :

1° La distance OB du centre du cercle inscrit au sommet B;

2° Le rayon du cercle inscrit;

3° Le rayon du cercle inscrit dans la partie du triangle comprise entre le sommet A et l'arc convexe vers le point A appartenant à la surface inscrite dans le triangle.

(Deux heures sont accordées pour ce travail.)

Épure.

Une pyramide régulière SABC... à base octogonale, s'appuie par sa base ABC... sur le plan horizontal, de manière que le côté AB, placé à gauche, est perpendiculaire à la ligne de terre. Chaque côté de la base vaut 37 millimètres, et chaque arête latérale 119. Par le sommet S, on mène la parallèle à la ligne de terre, et l'on prend sur cette parallèle, vers la droite, une longueur ST égale à $R \times 2,6$, R étant le rayon du cercle circonscrit au polygone ABC... On joint le point T aux sommets A, B, C..., de manière à former une seconde pyramide TABC..., de même base que la première. Cela posé, on demande de construire :

1° Les projections de ces deux pyramides, en ayant soin de bien distinguer les parties visibles et invisibles;

2° Les projections de la sphère circonscrite à la pyramide SABC..., ainsi que celles du point, autre que C, où cette sphère est rencontrée par l'arête TC de la pyramide TABC....

(Deux heures et demie sont accordées pour ce travail.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1868).

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

Soit un parallélogramme OABC; sur la diagonale OC on prend un point I quelconque et on considère une conique S ayant le point I pour centre, et passant aux trois points O, A, B. A cette conique on mène des tangentes parallèles à OB, et on demande le lieu des points de contact de ces tangentes lorsque le point I parcourt la droite indéfinie OC.

Sur le lieu trouvé, on séparera les parties qui correspondent au cas où la conique considérée S est du genre ellipse, de celles qui correspondent au cas où cette conique est du genre hyperbole :

Trigonométrie.

On donne dans un triangle les côtés a et b, et l'angle compris C; on demande de calculer les angles A, B et le côté c, ainsi que la surface du triangle :

$$a = 2453^{m},62,$$
$$b = 3718^{m},55,$$
$$C = 74^{\circ}23'45'',1.$$

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Compositions du 7 et du 8 juillet 1868.

1° *Question d'analyse.*

Déterminer tous les conoïdes droits tels que, en chacun de leurs points, les rayons de courbure des deux sections principales de la surface soient égaux et dirigés en sens contraires.

On indiquera ensuite comment varie sur les surfaces obtenues la valeur absolue du rayon de courbure, commune aux deux sections principales, quand le point se déplace sur l'une des génératrices.

On sait que les valeurs des rayons de courbure principaux sont les racines de l'équation

$$(rt - s^2)\rho^2 - \sqrt{1 + p^2 + q^2}[(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r]\rho + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

2° *Question de mécanique.*

Trouver le mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir dans un plan qui tourne, d'un mouvement uniforme et avec une vitesse angulaire donnée, autour d'un axe vertical OZ situé dans ce plan, et qui est sollicité par son poids et par une force attractive dirigée vers un point fixe O situé sur l'axe OZ, la force variant proportionnellement à la distance.

Les candidats indiqueront d'une manière précise les principes de mécanique dont ils feront usage.

QUESTIONS.

895. Trouver le lieu du centre d'une ellipse d'aire constante circonscrite à un triangle.

Si deux triangles sont homologiques, montrer qu'on peut faire passer par leurs six sommets une cubique telle, que les tangentes aux trois sommets de chacun des triangles aillent concourir respectivement en un point situé sur la courbe. (SYLVESTER.)

896. Soit I un point d'inflexion d'une cubique. Par I menons des tangentes en P, Q, R à la courbe, et par P des tangentes en A, B, C, D. Montrer que I, Q, R sont les points de rencontre respectifs des trois couples de côtés opposé du quadrilatère ABCD. (SYLVESTER.)

897. 1° Soit P un point variable d'une courbe plane donnée (A), O un point fixe, et Q le sommet d'une hyperbole équilatère dont le centre est en O, et qui touche la courbe donnée en P. Montrer que la tangente en Q à la courbe lieu du point Q fait avec OQ un angle égal à celui que fait OP avec la tangente à (A) en P.

2° La courbe (B), inverse du lieu de Q par rapport à l'origine O, sera réciproque à la courbe donnée; c'est-à-dire que si (B) est regardée comme donnée, la courbe primitive (A) en dérivera précisément comme (B) dérive de (A).

(Une conique rapportée à son centre et une ellipse de Cassini sont en ce sens des courbes réciproques.)

(W. ROBERTS.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME VII, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Calcul infinitésimal.

Mécanique.

Bulletin bibliographique.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME VII, 2e SÉRIE.)

(*) Le chiffre suivi des lettres Éc. Pol., Éc. Norm. et Éc. Cent. indique le rang d'admission à l'École Polytechnique, à l'École Normale et à l'École Centrale.

(*) Nom anagrammatique.

TABLE DES QUESTIONS PROPOSÉES ET RÉSOLUES

DANS LES XXVII PREMIERS VOLUMES

DES *NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.*

Fautes essentielles à corriger.

Les numéros d'ordre :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (t. I, p. 123);
1, 2 (t. I, p. 166);
63, 64 (t. II, p. 416);
65, 66, 67 (t. II, p. 454);
107, 108, 109, 110, 111 (t. V, p. 112);
100, 101, 102, 103 (t. VIII, p. 107)

doivent être remplacés, respectivement, par

13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20;
21, 22;
75, 76;
77, 78, 79;
106, 107, 108, 109, 110;
204, 205, 206, 207.

Le numéro d'ordre du théorème de la page 96, tome II, est 62.

Au tome II, page 319, ligne 1, au lieu de : théorème 36, t. I, p. 395, *lisez* théorème 58, tome II, page 48.

Les formules de la question 633 sont fausses (t. II, 2e série, p. 240).

Conventions.

1° 2 : t. I, p. 147, signifie que la solution de la question n° 2 se trouve au tome I, page 147;

2° 35 : t. II, p. 36; t. IX, p. 60, signifie que de la question n° 35, on a donné deux solutions : l'une au tome II, page 39, et l'autre au tome IX, page 60.

3° 93 : t. VI², p. 497, signifie que la question n° 93 se trouve dans la deuxième série, au tome VI, page 497.

PREMIÈRE SÉRIE.

TOME I.

13 : t. VII, p. 61.
15 : t. I, p. 470.
16 : t. VII, p. 220.
17 : t. I. p. 240.
19 : t. II, p. 43.
20 : t. I, p. 422.
23 : t. I, p. 360.
24 : t. I, p. 471.
25 : t. XII, p. 80.
26 : t. I, p. 357.
27 : t. II, p. 508.
29 : t. I, p. 356.
30 : t. I, p. 345.
31 : t. I, p. 474.
t. VIII, p. 61, 130.
33 : t. II, p. 115.
35 : t. II, p. 36.
t. IX, p. 60.
36 : t. I, p. 507.
t. II, p. 237.
38 : t. II, p. 510.
39 : t. II, p. 312, 496.
40 : t. III, p. 391.
42 : t. III, p. 172.
43 : t. II, p. 365.
44 : t. III, p. 365.
45 : t. IX, p. 432.
46 : t. VI, p. 353.
47 : t. XI, p. 287.
49 : t. II, p. 244.
50 : t. II, p. 145.
t. VIII, p. 458.
52 : t. X, p. 25.
53 : t. VI, p. 46.

TOME II.

58 : t. II, p. 319.
60 : t. XI, p. 80.
61 : t. VII[2], p. 440.
63 : t. IX, p. 322.
64 : t. II, p. 314.
66 : t. IX, p. 188.
67 : t. II, p. 327.
t. VII, p. 231.
68 : t. III, p. 22.
t. VI, p. 233.
69 : t. VI, p. 350.
70 : t. VI, p. 399, 427.
71 : t. III, p. 170.
72 : t. II, p. 468.
t. III, p. 76.
73 : t. III, p. 121.
74 : t. II, p. 499.
75 : t. III, p. 19.
76 : t. III, p. 25.
77 : t. III, p. 226.
78 : t. X, p. 319.
79 : t. I[2], p. 206.

TOME III.

80 : t. III, p. 124.
81 : t. XIII, p. 132.
t. XIV, p. 248.
82 : t. IV, p. 520.
83 : t. V, p. 122.
84 : t. XI, p. 99.
85 : t. III, p. 404.
87 : t. X, p. 147.
88 : t. IX, p. 299.
89 : t. X, p. 144.
90 : t. III, p. 592.

TOME IV.

91 : t. IV, p. 186.
92 : t. IV, p. 194.
93 : t. VI[2], p. 497.
95 : t. V, p. 449.
96 : t. V, p. 199.
97 : t. VI, p. 398.
97 : t. VII, p. 424.
98 : t. IV, p. 656.
100 : t. V, p. 547.
101 : t. V, p. 13.
t. VI, p. 196.
102 : t. IV, p. 654.
103 : t. V, p. 127, 147.
t. VIII, p. 297.
104 : t. V, p. 258.
t. I[2], p. 244.
105 : t. II[2], p. 12.

TOME V.

106 : t. V, p. 187, 255.
107 : t. VI, p. 356.
108 : t. VI, p. 356.
109 : t. VI, p. 356.
110 : t. V, p. 227.
112 : t. V, p. 256.
113 : t. V, p. 348.
114 : t. V, p. 253.
115 : t. V, p. 548.
118 : t. V, p. 413.
t. XI, p. 451.
119 : t. V, p. 361.
121 : t. VII, p. 179.
122 : t. V, p. 331.
123 : t. V, p. 333.
124 : t. VI, p. 221.
125 : t. V, p. 533.
128 : t. XII, p. 126.
129 : t. V, p. 479.
130 : t. VI, p. 91.
131 : t. V, p. 632.
133 : t. V, p. 633.
134 : t. VI, p. 10, 103.
135 : t. IX, p. 279.
136 : t. XI, p. 154.
137 : t. V, p. 25 et 99.
138 : t. VI, p. 122.

TOME VI.

141 : t. XIII, p. 23.
t. XIV, p. 20.
143 : t. VI, p. 176, 195.
144 : t. VI, p. 431.
145 : t. XI, p. 189.
146 : t. VI, p. 268, 375.
148 : t. XI, p. 316.
149 : t. VI, p. 367, 370.
150 : t. VI, p. 369.

151 : t. VI, p. 388.
t. VII, p. 260.
t. VIII, p. 89.
152 : t. VI, p. 389.
153 : t. XIX, p. 421.
154 : t. VI, p. 395.
155 : t. VI, p. 374.
t. XI, p. 51.
156 : t. VII, p. 89.
158 : t. VI, p. 365.
159 : t. VI, p. 366.
160 : t. VI, p. 363.
161 : t. VII, p. 114, 206 et 225.
162 : t. VII, p. 28, 58.
163 : t. VI, p. 370.
164 : t. VI, p. 370.
165 : t. XI, p. 191.
167 : t. XII, p. 34.
168 : t. VI, p. 483.
169 : t. VI, p. 576.
170 : t. VII, p. 99.
171 : t. VII, p. 101.
172 : t. VII, p. 103.
173 : t. VII, p. 13.

TOME VII.

175 : t. VII, p. 194.
t. VIII, p. 271.
177 : t. VII, p. 126 et 171.
178 : t. VII, p. 144.
t. VIII, p. 379.
179 : t. VII, p. 177.
t. VIII, p. 298.
180 : t. XIII, p. 283.
181 : t. XI, p. 146.
182 : t. XI, p. 319.
183 : t. X, p. 145.
184 : t. VII, p. 307.
185 : t. VII, p. 300.
186 : t. VII, p. 255.
188 : t. VII, p. 340.
189 : t. VII, p. 298 et 338.
190 : t. VIII, p. 271.
t. XIX, p. 315.
191 : t. VIII, p. 45.
192 : t. XX, p. 57.
194 : t. IX, p. 172.
195 : t. XI, p. 398.
t. XVII, p. 79 et 194.
196 : t. X, p. 198.
197 : t. VIII, p. 413.
198 : t. VIII, p. 376.
t. X, p. 314.

TOME VIII.

200 : t. IX, p. 209, 211.
201 : t. VIII, p. 206 et 248.
202 : t. VIII, p. 377.
203 : t. VIII, p. 142.
204 : t. VIII, p. 412.
205 : t. XIII, p. 372.
206 : t. IX, p. 116.
t. X, p. 80.
208 : t. VIII, p. 443.
209 : t. X, p. 317.
210 : t. VIII, p. 444.
211 : t. IX, p. 59.
212 : t. IX, p. 62.
213 : t. IX, p. 73.
214 : t. VIII, p. 445.
215 : t. IX, p. 56, 151.
216 : t. VIII, p. 442.

TOME IX.

217 : t. IX, p. 215.
219 : t. IX, p. 206, 212.
220 : t. IX, p. 206, 212.
221 : t. IX, p. 146.
222 : t. IX, p. 146.
223 : t. IX, p. 265.
224 : t. IX, p. 351.
225 : t. IX, p. 351.
226 : t. IX, p. 233.
227 : t. IX, p. 246.
228 : t. XI, p. 314.
229 : t. IX, p. 431.

TOME X.

230 : t. X, p. 316.
231 : t. X, p. 316.
232 : t. XI, p. 345.
t. XVI, p. 166.
233 : t. X, p. 353.
235 : t. XI, p. 187.
236 : t. X, p. 279.
237 : t. X, p. 280.
t. XI, p. 463.
238 . t. XII, p. 215.
239 : t. XIV, p. 245.
241 : t. XI, p. 424.
t. XIV, p. 20.
t. XX, p. 53.
242 : t. XII, p. 161, 336.
t. XX, p. 54.
243 : t. XI, p. 186.
244 : t. XI, p. 453.
246 : t. XI, p. 48.
247 : t. X, p. 461.
248 : t. XI, p. 278.

TOME XI.

249 : t. XI, p. 126.
250 : t. XI, p. 449.
253 : t. XI, p. 328.
254 : t. XI, p. 274.
255 : t. XIII, p. 210 et 270.
256 : t. XIV, p. 84.
257 : t. XIII, p. 320.
258 : t. XII, p. 70.
259 : t. XII, p. 70.
260 : t. XII, p. 306.
262 : t. XIII, p. 26.

262 : t. XVII, p. 348.
263 : t. XII, p. 319.
t. XIII, p. 362.
264 : t. XII, p. 237.
265 : t. XII, p. 169.
267 : t. XII, p. 167.
267 : t. XIII, p. 429.
268 : t. XII, p. 222.
269 : t. IIe, p. 527, 528.

TOME XII.

270 : t. Ie, p. 335.
271 : t. XII, p. 289.
272 : t. XIV, p. 97.
t. XVI, p. 371.
273 : t. XII, p. 441.
t. XIII, p. 33.
t. XIX, p. 115.
274 : t. XII, p. 462.
275 : t. XII, p. 336.
276 : t. XIII, p. 200.
t. XIV, p. 85, 88.
277 : t. XIII, p. 201.
278 : t. XIII, p. 202.
t. XIV, p. 170.
279 : t. XVI, p. 240.
t. XVII, p. 347.
280 : t. XIV, p. 89.
t. XV, p. 99.
281 : t. XX, p. 92.
282 : t. XIII, p. 316.
283 : t. XIII, p. 119.
284 : t. XIII, q. 121.
285 : t. XIII, p. 398 et
402.
286 : t. XIII, p. 398 et
402.

TOME XIII.

287 : t. XVII, p. 354.
t. IIe, p. 212.
288 : t. IIe, p. 343.
289 : t. XIII, p. 331.
t. XIV, p. 32.
289 : t. XVI, p. 102.
290 : t. XIV, p. 198.
t. XVI, p. 369.
292 : t. XIV, p. 132.
293 : t. XIV, p. 241.
294 : t. XV, p. 459.
t. Ie p. 62.
295 : t. XVI, 85.
t. Ie, p. 64.
t. IIe, p. 449.

TOME XIV.

296 : t. XIV, p. 142.
t. XV, p. 58.
t. XVII, p. 399.
t. XX, p. 452.
297 : t. XIV, p. 413.
299 : t. XIV, p. 257.
300 . t. XIV, p. 254 et
368.
301 : t. XIV, p. 235.
t. XV, p. 61.
302 : t. XV, p. 61.
303 : t. XIV, p. 365 et
435.
304 : t. XIV, p. 311.
306 : t. XIV, p. 318.
307 : t. XVII, p. 182.
307 : t. IIe, p. 220.
308 : t. XV, p. 46.
309 : t. IVe, p. 514.
310 : t. XIV, p. 444.
311 : t. XV, p. 181.
312 : t. XVI, p. 253.
313 : t. Ie, p. 163.

TOME XV.

314 : t. XVII, p. 315.
315 : t. XV, p. 239 et
259.
316 : t. XV, p. 296.
t. XVII, p. 396.
317 : t. XX, p. 342.
t. IIe, p. 300, 422.
318 : t. XV, p. 157.
319 : t. XVI, p. 385.
t. XVII, p. 82.
320 : t. XV, p. 297.
321 : t. XV, p. 224.
t. XVI, p. 41.
322 : t. XV, p. 225.
t. XVI, p. 42.
323 : t. XV, p. 226 et
228.
t. XVI, p. 252.
323 : t. XIX, p. 336.
326 : t. XV, p. 299.
327 : t. XVI, p. 39.
328 : t. XV, p. 300.
329 : t. XV, p. 303.
330 : t. XV, p. 305 et
321.
331 : t. XVI, p. 354.
332 : t. XVI, p. 26, 66
et 241.
334 : t. XVI, p. 52, 139
et 243.
335 : t. XVI, p. 37.
336 : t. XVI, p. 43.
337 : t. XVII, p. 229.
338 : t. XVI, p. 20.
339 : t. XVI, p, 45, 48.
340 : t. XVI, p. 16.
342 : t. VIIe, p. 442.
343 : t. XVI, p. 159.
344 : t. XVI, p. 22, 44
et 79.
345 : t. XVI, p. 9, 10
et 71.
346 : t. XVI, p. 19.
347 : t. XVII, p. 326.
348 : t. XVI, p. 50, 82.
349 : t. XVI, p. 172.
350 : t. XVI, p. 248 et
416.
351 : t. XVIII, p. 73.
352 : t. XVI, p. 96.
354 : t. XVI, p. 24 et
173.
355 : t. XVI, p. 55 et
173.

TOME XVI.

356 : t. XVII, p. 326.
357 : t. XVI, p. 243.
358 : t. XVI, p. 140.
359 : t. XVI, p. 176.
361 : t. XVI, p. 234, 255 et 333.
363 : t. XVI, p. 200 et 201.
364 : t. XVI, p. 196.
365 : t. XVI, p. 184 et 262.
366 : t. XVI, p. 187.
367 : t. XVI, p. 199.
368 : t. XVI, p. 192.
369 : t. XVI, p. 189, 192 et 269.
370 : t. XVI, p. 336 et 345.
371 : t. XVII, p. 152.
373 : t. XVI, p. 292.
374 : t. XVI, p. 297.
375 : t. XVI, p. 290.
376 : t. XVIII, p. 129.
377 : t. XVI, p. 407.
t. XVII, p. 19.
378 : t. IV^{2}, p. 225.
379 : t. IV^{2}, p. 228.
380 : t. III^{2}, p. 127.
381 : t. IV^{2}, p. 547.
382 : t. XVI, p. 434.
384 : t. XVI, p. 337.
386 : t. XVI, p. 288.
387 : t. XVIII, p. 420.
t. III^{2}, p. 401.
388 : t. XVI, p. 347.
389 : t. XVI, p. 296, 369 et 375.
390 : t. XVI, p. 380.
391 : t. XVI, p. 462.
392 : t. XVI, p. 456.
t. XVII, p. 156.
393 : t. XVII, p. 5, 205 et 207.
394 : t. XVI, p. 447.
t. XVII, p. 11.
395 : t. XX, p. 42.
396 : t. XVI, p. 428.
t. XVII, p. 9, 63.
397 : t. XVI, p. 449.
398 : t. IV^{2}, p. 76.
401 : t. XVII, p. 113 et 429.
402 : t. XVII, p. 115 et 428.
403 : t. XVII, p. 117 et 191.
404 : t. XVII, p. 264.
405 : t. XVII, p. 192.
t. XIX, p. 320.
406 : t. XVIII, p. 224, 230 et 237.
t. II^{2}, p. 22.
407 : t. XIX, p. 316.
408 : t. XVII, p. 190.
409 : t. XVII, p. 191.
410 : t. XVII, p. 187.
411 : t. XVII, p. 187.
412 : t. XVIII, p. 420.
t. XX, p. 120.

TOME XVII.

413 : t. XVII, p. 179 et 180.
415 : t. XVII, p. 123.
416 : t. XIX, p. 38.
417 : t. XVIII, p. 451.
418 : t. XIX, p. 97.
419 : t. III^{2}, p. 168.
420 : t. XVII, p. 319.
421 : t. XVII, p. 126.
422 : t. XVII, p. 118.
423 : t. XVIII, p. 277.
425 : t. XVII, p. 195.
426 : t. I^{2}, p. 111.
t. IV^{2}, p. 515.
427 : t. XVIII, p. 335 et 336.
428 : t. XVII, p. 177.
429 : t. V, p. 35.
430 : t. V^{2}, p. 35.
431 : t. XVII, p. 263.
432 : t. XIX, p. 170.
433 : t. XVII, p. 285.
435 : t. XVIII, p. 199.
436 : t XIX, p. 141.
437 : t. VII^{2}, p. 37.
438 : t. XIX, p. 186.
440 : t. XVII, p. 296 et 393.
442 : t. XVII, p. 393.
443 : t. XVIII, p. 77, 261 et 406.
446 : t. XVII, p. 447.
447 : t. VI^{2}, p. 323.
449 : t. XIX, p. 195.
450 : t. XVII, p. 462.
451 : t. XVII, p. 432.
452 : t. XVIII, p. 172.
453 : t. XVIII, p. 68, 71 et 172.
455 : t. XVIII, p. 65 et 150.
456 : t. XVIII, p. 65.
t. I^{2}, p. 114.
457 : t. XVIII, p. 125 et 161.
458 : t. XVII, p. 463.
t. XVIII, p. 66, 147 et 150.

TOME XVIII.

459 : t. XVIII, p. 148.
460 : t. XVIII, p. 108, 110 et 186.
461 : t. XVIII, p. 242 et 273.
t. XIX, p. 34.
t. XX, p. 155.
462 : t. XVIII, p. 204.
463 : t. XVIII, p. 217.
464 : t. XIX, p. 149.
465 : t. XVIII, p. 205.
t. XIX, p. 151.
467 : t. XVIII, p. 206 et 232.
468 : t. XVIII, p. 219 et 233.
468 : t. XIX, p. 155.
469 : t. XVIII, p. 184 et 207.
470 : t. XVIII, p. 280.
471 : t. XVIII, p. 248.
472 : t. XVIII, p. 350.
474 : t. II^{2}, p. 60.
476 : t. XVIII, p. 359.

477 : t. XVIII, p. 265.
478 : t. XIX, p. 283.
t. XX, p. 88.
479 : t. XVIII, p. 249.
t. XX, p. 155 et 264.
481 : t. XVIII, p. 339.
483 : t. XIX, p. 11, 52, 54, 158 et 160.
483 : t. XX, p. 121.
484 : t. XIX, p. 13, 53, 57, 158 et 160.
485 : t. XIX, p. 13, 188.
486 : t. III^2, p. 129.
488 : t. XIX, p. 80.
490 : t. V^2, p. 132.
491 : t. III^2, p. 25.
492 : t. XIX, p. 91.
493 : t. XIX, p. 5, 83 et 216.
t. I^2, p. 321.
494 : t. XIX, p. 356.
t. XX, p. 26.
497 : t. XX, p. 275.
t. III^2, p. 36.

TOME XIX.

498 : t. XIX, p. 154 et 279.
499 : t. XIX, p. 356.
t. XX, p. 28.
500 : t. XIX, p. 389.
501 : t. V^2, p. 134.
502 : t. XIX, p. 85, 88 et 93.
503 : t. XX, p. 353 et 436.
504 : t. XIX, p. 162.
507 : t. XIX, p. 397.
508 : t. XIX, p. 398.
509 : t. I^2, p. 57.
510 : t. XX, p. 51.
514 : t. XIX, p. 230.
515 : t. XIX, p. 181.
517 : t. XIX, p. 235.
518 : t. XIX, p. 237.
519 : t. XIX, p. 238.
520 : t. XIX, p. 239.
521 : t. II^2, p. 326.
522 : t. XIX, p. 431.
524 : t. XX, p. 25.
527 : t. XX, p. 96.
529 : t. VI^2, p. 492.
530 : t. XIX, p. 418.
531 : t. XX, p. 175 et 273.
532 : t. XX, p. 176, 274 et 286.
533 : t. III^2, p. 223.
534 : t. XIX, p. 433.
535 : t. XIX, p. 420.
535 : t. XX, p. 271.
537 : t. XX, p. 458.
538 : t. VI^2, p. 377.
540 : t. III^2, p. 131.
542 : t. XIX, p. 434.
543 : t. XX, p. 122.
544 : t. XIX, p. 436.
545 : t. XX, p. 95.
547 : t. VI^2, p. 327.
548 : t. XX, p. 85.
t. VII^2, p. 221.
550 : t. III^2, p. 320.
551 : t. XX, p. 97.
553 : t. II^2, p. 274.
555 : t. XX, p. 91.
556 : t. V^2, p. 273, 276.
557 : t. XX, p. 135.

TOME XX.

558 : t. V^2, p. 327.
559 : t. VI^2, p. 504.
560 : t. II^2, p. 513.
561 : t. III^2, p. 253.
562 : t. III^2, p. 257 et 393.
563 : t. III^2, p. 21.
564 : t. III^2, p. 21.
565 : t. III^2, p. 21.
566 : t. XX, p. 434 et 439.
567 : t. XX, p. 319.
568 : t. XX, p. 422.
569 : t. XX, p. 283 et 301.
569 : t. I^2, p. 137.
570 : t. XX, p. 289 et 433.
571 : t. XX, p. 375.
572 : t. XX, p. 266, 284, 366 et 393.
574 : t. XX, p. 314.
575 : t. XX, p. 268.
576 : t. II^2, p. 61.
577 : t. I^2, p. 157.
579 : t. XX, p. 430.
580 : t. XX, p. 295.
581 : t. III^2, p. 64.
582 : t. XX, p. 294.
t. VI^2, p. 424.
584 : t. XX, p. 302.
586 : t. XX, p. 296.
t. I^2, p. 139.
587 : t. XX, p. 297.
t. I^2, p. 139.
588 : t. XX, p. 291.
590 : t. V^2, p. 37, 511.
591 : t. IV^2, p. 549.
594 : t. I^2, p. 183.
595 : t. XX, p. 447.
600 : t. IV^2, p. 551.
601 : t. XX, p. 464.
t. I^2, p. 118.
602 : t. I^2, p. 158, 401.
603 : t. I^2, p. 55.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME I.

605 : t. III^2, p. 173.
608 : t. II^2, p. 145.
609 : t. I^2, p. 116, 159 et 179.
609 : t. II^2, p. 16.
610 : t. II^2, p. 355.
611 : t. I^2, p. 67.
612 : t. I^2, p. 342.
613 : t. V^2, p. 277, 459.
614 : t. I^2, p. 172, 174, 316 et 317.
t. III^2, p. 385.

TOME II.

TOME III.

TOME IV.

TOME V.

749 . t. V^2, p. 366.
750 : t. V^2, p. 230.
751 : t. VI^2, p. 73.
752 : t. V^2, p. 420. t. VI^2, p. 510.
753 : t. V^2, p. 329.
754 : t. V^2, p. 426.
755 : t. V^2, p. 361 et 362.
756 : t. V^2, p. 362.
757 : t. V^2, p. 333.
760 : t. VI^2, p. 219.
761 : t. VI^2, p. 223.
762 : t. VI^2, p. 225.
763 : t. VI^2, p. 74.
764 : t. V^2, p. 465.
765 : t. VI^2, p. 182.
766 : t. V^2, p. 466.
767 : t. VI^2, p. 466.
769 : t. VI^2, p. 227. t. VII^2. p. 88.
770 : t. VI^2, p. 227. t. VII^2, p. 89.
771 : t. VI^2, p. 283.
773 : t. VI^2, p. 126.
775 : t. V^2, p. 520. t. VI^2, p. 416.
776 : t. V^2, p. 521.
777 : t. V^2, p. 524. t. VI^2, p. 21, 416.
778 : t. V^2, p. 21. t. VI^2, p. 76, 417.
779 : t. VI^2, p. 21, 78.
780 : t. VI^2, p. 34.
781 : t. VI^2, p. 35.
782 : t. VI^2, p. 80.
783 : t. VI^2, p. 80.
784 : t. VI^2, p. 80.
788 : t. VI^2, p. 37.
789 : t. VI^2, p. 38, 40.
790 : t. VI^2, p. 136.

TOME VI.

792 : t. VI^2, p. 184.
794 : t. VI^2, p. 183.
795 : t. VI^2, p. 374.
796 : t. VI^2, p. 331.
797 : t. VI^2, p. 186.
799 : t. VI^2, p. 380.
800 : t. VI^2, p. 381.
801 : t. VI^2, p. 372.
803 : t. VII^2, p. 318.
808 : t. VI^2, p. 517.
809 : t. VI^2, p. 370.
810 : t. VI^2, p. 370.
811 : t. VII^2, p. 227.
813 : t. VI^2, p. 383 et 471.
814 : t. VII^2, p. 183.
816 : t. VII^2, p. 128.
817 : t. VII^2, p. 130.
818 : t. VII^2, p. 39.
819 : t. VII^2, p. 131.
822 : t. VII^2, p. 331.
823 : t. VII^2, p. 332.
824 : t. VII^2, p. 91.
825 : t. VI^2, p. 556 et 557.
827 : t. VII^2, p. 132.
830 : t. VI^2, p. 559 et 561.
834 : t. VII^2, p. 40.
835 : t. VII^2, p. 42.
836 : t. VII^2, p. 445.

TOME VII.

840 : t. VII^2, p. 447.
842 : t. VII^2, p. 185, 186.
843 : t. VII^2, p. 367, 369.
844 : t. VII^2, p. 187.
847 : t. VII^2, p. 417.
849 : t. VII^2, p. 519.
850 : t. VII^2, p. 334.
856 : t. VII^2, p. 449.
863 : t. VII^2, p. 451.

TABLE DES QUESTIONS PROPOSÉES ET NON RÉSOLUES

DANS LES XXVII PREMIERS VOLUMES

DES *NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.*

Tome I,	5, 14, 18, 21, 22, 28, 32, 34, 37, 41, 48, 51, 54, 55, 56, 57.
Tome II,	59, 62, 65.
Tome III,	86.
Tome IV,	94, 99.
Tome V,	111, 116, 117, 120, 126, 127, 132, 139.

Tome VI,	140, 142, 147, 157, 166, 174.
Tome VII,	176, 187, 193.
Tome VIII,	199, 207.
Tome IX,	218.
Tome X,	234, 240, 245.
Tome XI,	251, 252, 261, 266.
Tome XIII,	291.
Tome XIV,	298, 305.
Tome XV,	324, 325, 333, 341, 353.
Tome XVI,	360, 362, 372, 383, 385, 399, 400.
Tome XVII,	414, 424, 434, 439, 441, 444, 445, 448, 454.
Tome XVIII,	466, 473, 475, 480, 482, 487, 489, 495, 496.
Tome XIX,	505, 506, 511, 512, 513, 516, 523, 525, 526, 528, 536, 539, 541, 546, 549, 552, 554.
Tome XX,	573, 578, 583, 585, 589, 592, 593, 596, 597, 598, 599.
Tome I^2,	604, 606, 607, 615, 617, 631.
Tome II^2,	643, 662, 666.
Tome III^2,	693, 703.
Tome IV^2,	718, 724, 729, 730, 731, 732, 744, 748.
Tome V^2,	758, 759, 768, 772, 774, 785, 786, 787.
Tome VI^2,	791, 793, 798, 802, 804, 805, 806, 807, 812, 815, 820, 821, 826, 828, 829, 831, 832, 833, 837, 838.
Tome VII^2,	839, 841, 845, 846, 848, 851, 852, 853, 854, 855, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897.

Observations.

Les questions dont les numéros d'ordre sont : 673 et 711 n'ont pas été résolues complétement. Pour la question 673, *voyez* t. II^2, p. 479, et t. VI^2, p. 124; pour la question 711, *voyez* t. III^2, p. 443; t. IV^2, p. 78 et 79; t. VII^2, p. 443. La troisième partie de cette dernière question n'a pas été résolue.

Sur 897 questions proposées, il reste 207 questions à résoudre.

FIN DU TOME VII, 2e SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

